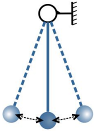
Stabilité
des Systèmes Asservis

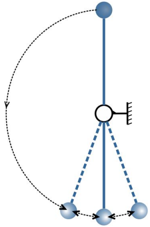
Spé MP–MP* 2025-2026

Lycée Thiers Marseille

Systèmes Asservis 2



Equilibre stable



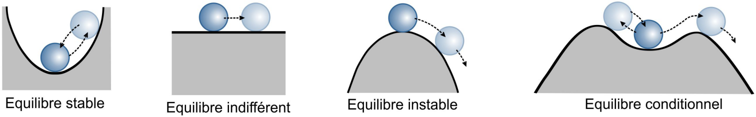
Equilibre instable

1 - Condition générale de stabilité

Définition

Après avoir été écarté de sa position d'équilibre par une cause passagère, un système est dit :

- **asymptotiquement stable** si il revient à cette position d'équilibre,
- **stable** si il s'en écarte d'une valeur constante et donc retrouve un équilibre différent de celui d'origine,
- **instable** si il s'écarte indéfiniment de l'équilibre initial.



Conditions nécessaires et suffisantes

Un système linéaire est stable lorsque sa réponse à :

- un échelon (dite réponse indicielle) tend vers une valeur finie en régime établi,
- un dirac (dite réponse impulsionnelle) tend vers 0 en $+\infty$,
- une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude finie.

1.1 Condition générale de stabilité
Condition fondamentale de stabilité des fonctions de transfert

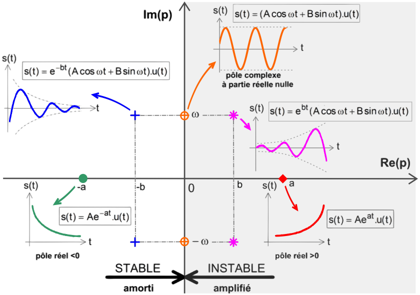
Stabilité BIBO : Entrée Bornée-Sortie Bornée

Un système est stable si l'application d'un signal borné (entrée ou perturbation) produit un signal de sortie borné.

Stabilité asymptotique

Un système **linéaire** est asymptotiquement stable si, et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert en Boucle Fermée (FTBF(p)) sont à partie réelle strictement négative.

Lieu des pôles de la FTBF et allure de la réponse à une impulsion



⚠ On calcule très rarement les pôles de la FTBF.

Etude de la stabilité au concours

- A partir du calcul de la **FTBF** : **critère algébrique** dit **critère de Routh-Hurwitz**, Hors programme en MP pour les systèmes d'ordre supérieur à 2.
- A partir du tracé de la **FTBO** dans le plan de Bode ou de Black :
  ♥ **critère graphique** dit **critère du revers**

2 - Critère algébrique de "Routh-Hurwitz"sur la **FTBF**

Définition

On appelle **critère de Routh**, le critère algébrique permettant d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur D(p) de sa fonction de transfert (en boucle fermée pour les systèmes asservis).
On note FTBF(p)= $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec $D(p) = a_0 + ... + a_n.p^n$
Il permet de déterminer le signe de la partie réelle des pôles à partir des coefficients de D(p).

Un polynôme à coefficients réels est appelé polynôme de Hurwitz si toutes ses racines sont de partie réelle strictement négative. (Sujet Mines-Ponts Maths 2 PSI 2022)
On construit la matrice de Hurwitz à partir des coefficients du polynôme D(p) : "tous les mineurs principaux de la matrice Hurwitz sont strictement positifs" ⇔ "D(p) est polynôme de Hurwitz". Donc si $D(p) = 1 + FTBO(p)$ est polynôme de Hurwitz, les pôles de la FTBF sont à partie réelle négative. En automatique, l'étude de la matrice de Hurwitz est traduite sous forme d'un tableau appelé Tableau de Routh.

2 - Critère algébrique de "Routh-Hurwitz"sur la **FTBF**

Définition

On appelle **critère de Routh**, le critère algèbrique permettant d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur D(p) de sa fonction de transfert (en boucle fermée pour les systèmes asservis).

On note FTBF(p)= $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec $D(p) = a_0 + ... + a_n.p^n$

Il permet de déterminer le signe de la partie réelle des pôles à partir des coefficients de D(p).

① Condition nécessaire de stabilité

Tous les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ de D(p) doivent être de **même signe**.

Dans le cas contraire, le système est **instable** en boucle fermée.

♥ ♥ Cette condition devient une **condition nécessaire et suffisante** pour les systèmes du **premier** et **second ordre** (mais pas du $3^{ème}$ ordre !)

② Condition suffisante de stabilité

Si la condition nécessaire est satisfaite, on construit le tableau de Routh (ordre > 3).

Le système est **stable** en boucle fermée **si et seulement si** tous les termes de la première colonne sont de même signe.

2.1 Critère algébrique de "Routh-Hurwitz"sur la **FTBF**
Tableau de Routh

1. les 2 premières lignes regroupent les coefficients a_i de D(p)=$a_0 + ... + a_n.p^n$
2. les coefficients de la première colonne sont les pivots et sont calculés.
3. les coefficients de la première colonne doivent être de même signe.

p^n	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{a_{n-2}}$	$\boldsymbol{a_{n-4}}$	$\cdots$
p^{n-1}	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-3}}$	$\boldsymbol{a_{n-5}}$	$\cdots$
p^{n-2}	A_{n-2}	B_{n-2}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p^1	A_1	B_1	$\cdots$	$\cdots$
p^0	A_0	B_0	$\cdots$	$\cdots$

Calcul des pivots :

$$A_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}}.(a_n.a_{n-3} - a_{n-1}.a_{n-2})$$

$$A_{n-3} = -\frac{1}{A_{n-2}}.(a_{n-1}.B_{n-2} - A_{n-2}.a_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$A_0 = -\frac{1}{A_1}.(A_2.B_1 - A_1.B_2)$$

$$B_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}}.(a_n.a_{n-5} - a_{n-1}.a_{n-4})$$

$(\forall i,\ B_i = 0$ pour n=3)

➡ nb de changements de signe dans la colonne des pivots = nb de pôles à partie réelle positive.

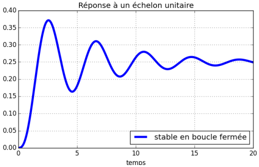
➚ Stabilité connue sans calculer les pôles de la FTBF.
➘ Cela suppose une connaissance précise de la FTBF,
ce qui est rarement le cas (incertitudes sur le modèle, présence de non linéarité...)
➘ Réponse "tout ou rien", on ne connait pas la limite de stabilité.

Exemple 1 :

$$D(p) = p^3 + 2.p^2 + 3.p + 4$$

p^3	**1**	**3**	0
p^2	**2**	**4**	0
p^1	$-\frac{1}{2}.(4*1-2*3)=1$	0	
p^0	$-\frac{1}{1}.(2*0-1*4)=4$	0	

$\Rightarrow$ le système est stable en boucle fermée.

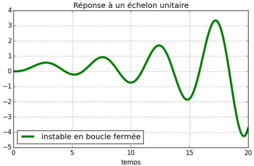


Exemple 2 :

$$D(p) = p^3 + 2.p^2 + p + 4$$

p^3	**1**	**1**	0
p^2	**2**	**4**	0
p^1	$-\frac{1}{2}.(4*1-2*1)=-1$	0	
p^0	$-\frac{1}{-1}.(2*0+1*4)=4$	0	

$\Rightarrow$ le système est instable en boucle fermée.
$\Rightarrow$ 2 changements de signe : 2 pôles à parties réelles positives.



Conditions d'utilisation

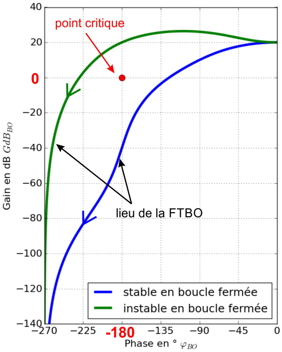
Le **critère du revers** est une forme simplifiée du critère de Nyquist permettant de discuter des racines de l'équation FTBO(p) = -1.
⚠ Critère applicable si la **FTBO(p) n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive** : le système en boucle ouverte est stable, juste oscillant (pôles complexes à partie réelle nulle) ou présente un ou plusieurs intégrateurs (pôles nuls).

Le **point (-1)** du plan complexe
($|H_{BO}| = 1$, φ_{BO} = -180°)
est appelé **point critique**

Critère du revers dans le plan de Black

Si en parcourant le **lieu de la FTBO** dans le sens de ω croissants :

- **on laisse le point critique (-180°, 0 dB) à droite** alors le système est stable en boucle fermée.
- dans le cas contraire, il est instable en boucle fermée

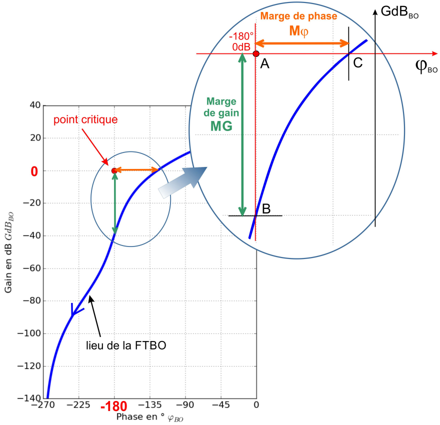


Marges de stabilité

A partir du lieu de la **FTBO** :

1. **Placer** le point critique A(-180°, 0dB), **tracer** la droite verticale φ_{BO}=-180° et la droite horizontale $GdB_{BO} = 0$dB,
2. **Vérifier** que le critère du revers est validé : **le système est stable en boucle fermée**
3. **Placer** les points B et C, intersections du lieu de la FTBO avec les droites tracées,
4. **Tracer** et **lire** les marges de gain MG (dB) et de phase Mφ (°)
   On choisit en général :

MG ≈ 15 dB et Mφ ≈ 45°

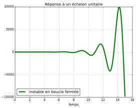


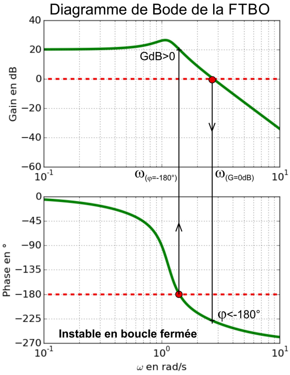
3.3 Critère graphique sur la FTBO
Critère du revers dans le plan de Bode

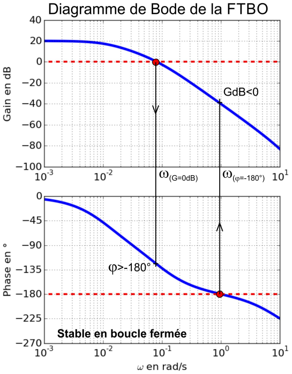
♥ ♥ Condition de stabilité : critère du revers dans le plan de Bode

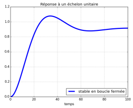
Le point critique correspond à 2 droites horizontales $GdB_{BO} = 0$dB et φ_{BO}=-180°.
Le système est **stable** en boucle fermée :

- si pour $\omega_{G=0dB}$, $\varphi(\omega_{G=0dB}) > -180°$
- ET si pour $\omega_{\varphi=-180°}$, $GdB(\omega_{\varphi=-180°}) < 0$





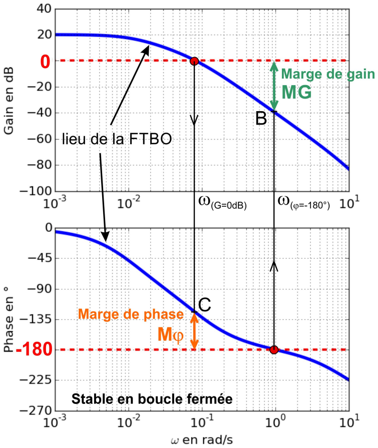




♥ ♥ Marges de stabilité

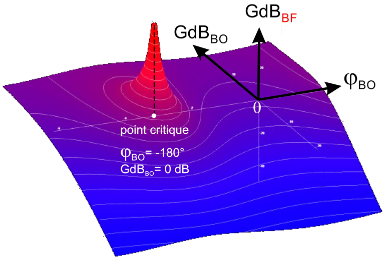
A partir du lieu de la **FTBO** :

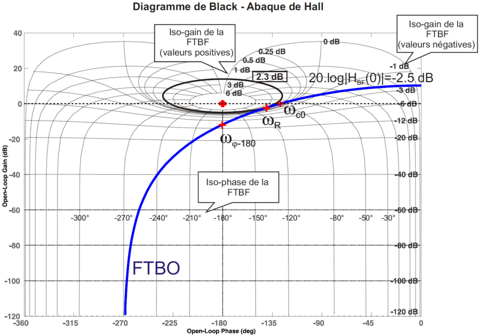
1. **Tracer** les droites horizontales φ_{BO}=-180° et $GdB_{BO} = 0$dB,
2. **Vérifier** que le critère du revers est validé $\varphi(\omega_{G=0dB}) > -180°$ ET $GdB(\omega_{\varphi=-180°}) < 0$: **le système est stable en boucle fermée**
3. **Placer** les points B($\omega_{\varphi=-180°}$) et C($\omega_{G=0dB}$)
4. **Tracer** et **lire** les marges de gain MG (dB) et de phase Mφ (°)



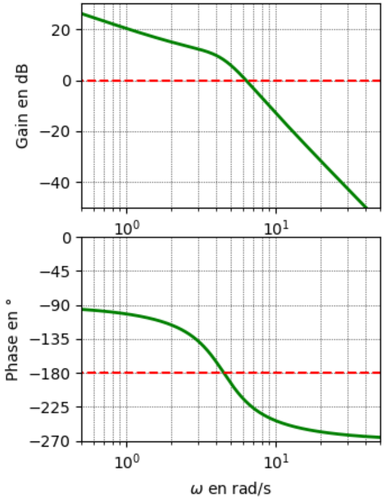
4 - Autre critère : Facteur de résonnance

Limiter l'amplitude de la FTBF, facteur de résonnance maxi de **2.3 dB** (valeur usuelle), permet d'assurer des marges de stabilité "optimales".
Pour un 2^{nd} ordre ce facteur de résonnance correspond à $\xi \approx 0,43$.
L'amplitude en boucle fermée peut être déduite graphiquement à partir de la FTBO dans un abaque traduisant la transformation $z \rightarrow \dfrac{z}{1+z}$



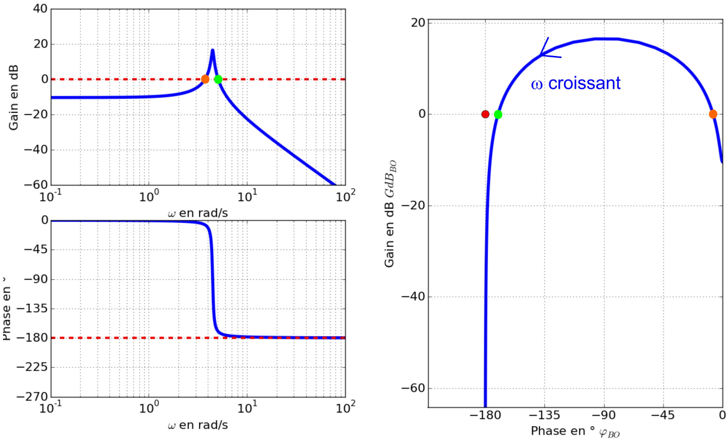


Stabilité et réglage d'un correcteur proportionnel



On donne le diagramme de BODE de la FTBO non corrigée.

1. **Discuter** la stabilité du système en boucle fermée.
2. **Déterminer** le gain K_1 d'un correcteur proportionnel assurant une marge de gain $M_G \geq 8dB$.
3. **Déterminer** le gain K_2 assurant une marge de phase $M_\varphi \geq 45°$.



Si GdB_{BO} s'annule 2 fois, *en général* il faut prendre la pulsation $\omega_{G=0dB}$ la plus grande. Le mieux serait de tracer le diagramme de Black...