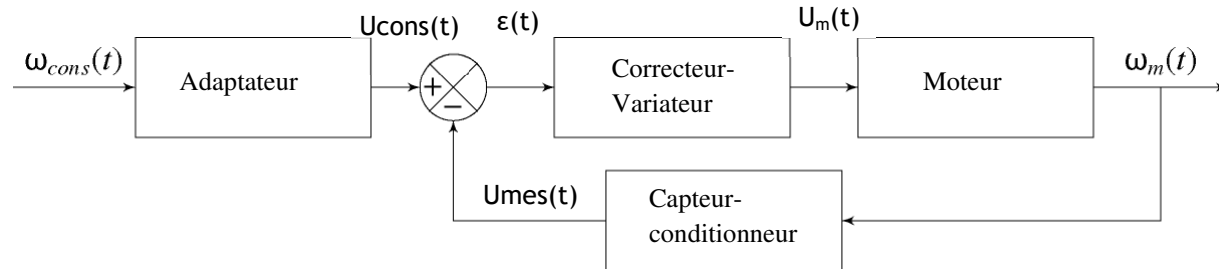


Tête de coupe de tissus (d'après CCP MP 2018) - Corrigé

PARTIE I-1 Modélisation du comportement du moteur

Q1. Schéma-bloc fonctionnel.



Q2. Equations du moteur à courant continu dans le domaine de Laplace.

$$u_m(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \rightarrow U_m(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p)$$

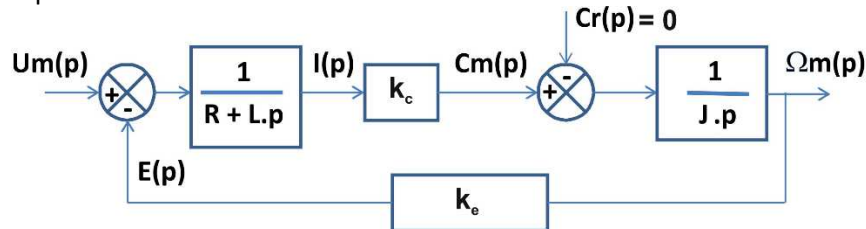
$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t) \rightarrow J \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) + C_r(p) \quad (\Omega_m(p) \text{ et non } \Omega(p))$$

$$c_m(t) = k_c \cdot i(t) \rightarrow C_m(p) = k_c \cdot I(p)$$

$$e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) \rightarrow E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p)$$

Q3. En supposant le couple résistant nul, $c_r(t) = 0$, donner la forme canonique de la fonction de transfert $H_m(p)$ en fonction de R , L , k_e , k_c et J .

Méthode 1 : On dessine rapidement le schéma-blocs du MMC



Puis formule de Black : $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{k_c}{J \cdot p(R + L \cdot p) + k_c k_e}$

Méthode 2 : A partir des équations :

$$I(p) = \frac{U_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p)}{(R + L \cdot p)}$$

$$\Omega_m(p) = \frac{k_c \cdot I(p)}{J \cdot p}$$

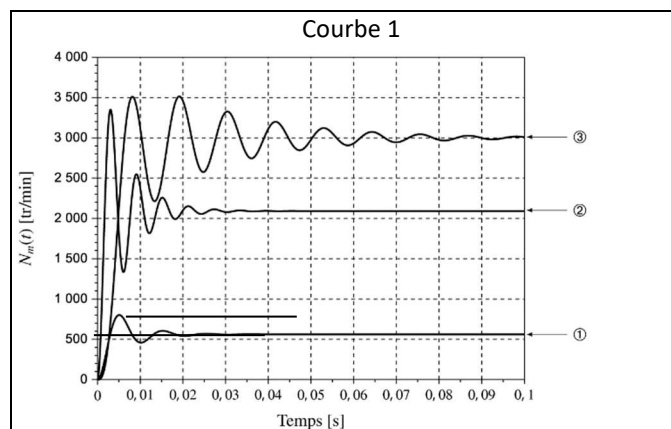
$$\Omega_m(p) = k_c \cdot \frac{U_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p)}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)} \rightarrow \Omega_m(p) \cdot [J \cdot p \cdot (R + L \cdot p) + k_e \cdot k_c] = k_c \cdot U_m(p)$$

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{J \cdot p(R + L \cdot p)}{k_c k_e}}$$

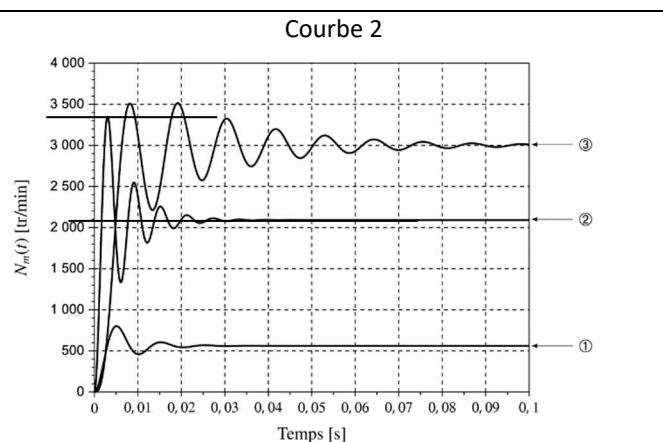
On obtient une fonction de transfert du second ordre avec un gain statique de $1/k_e$

PARTIE I-3 Optimisation des performances de l'asservissement en vitesse du moteur

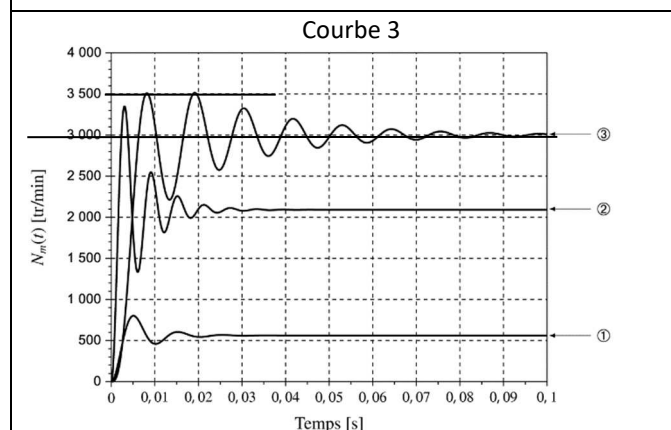
Q10. Valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1. Correcteur à adopter.



Précision	$E_{rs} = 2450 \text{ tr/min} \neq 0$ $E_{rs\%} = 82\%$	non conforme
Stabilité	entrée bornée / sortie bornée	conforme
Rapidité	$Tr5\% = 0.016s < 0.5s$	conforme
Amortissement	$D_{R1} = 45\% > 20\%$	non conforme



Précision	$E_{rs} = 900 \text{ tr/min} \neq 0$ $E_{rs\%} = 30\%$	non conforme
Stabilité	entrée bornée / sortie bornée	conforme
Rapidité	$Tr5\% = 0.018s < 0.5s$	conforme
Amortissement	$D_{R1} = 59\% > 20\%$	non conforme



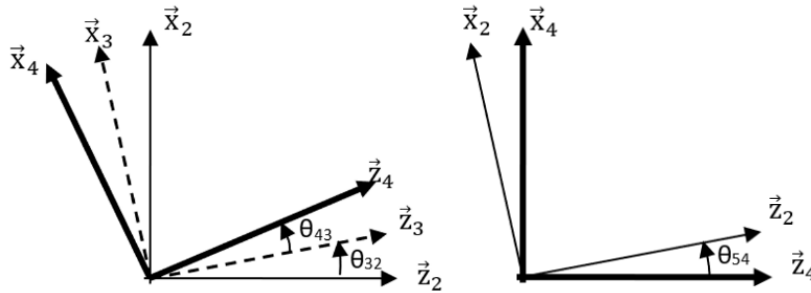
Précision	$E_{rs} = 0 \text{ tr/min}$ $E_{rs\%} = 0\%$	conforme
Stabilité	entrée bornée / sortie bornée	conforme
Rapidité	$Tr5\% = 0.048s < 0.5s$	conforme
Amortissement	$D_{R1} = 16\% < 20\%$	conforme

La courbe 3 permet de respecter l'exigence 1.2.2.1, il faut donc choisir un correcteur proportionnel intégral.

PARTIE III-1 Modélisation du comportement cinématique de la tête de coupe

Commentaires

En mécanique : cinématique, statique, dynamique

Il est **INDISPENSABLE** de dessiner les figures planes de changement de base !Q17. Relation entre les paramètres angulaires $\theta_{32}(t)$, $\theta_{43}(t)$ et $\theta_{54}(t)$.A partir des figures planes de changement de base, on a directement : $\theta_{54}(t) + \theta_{43}(t) + \theta_{32}(t) = 0$ Ou : $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_4) + (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = 0 \rightarrow \theta_{32}(t) + \theta_{43}(t) + \theta_{54}(t) = 0$ Q18. Relation entre le paramètre $\lambda(t)$, l'angle $\theta_{32}(t)$ et les données géométriques du système.

On réalise une fermeture géométrique entre les points A, B et C.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \rightarrow L_3 \vec{z}_3 + L_4 \vec{z}_4 - \lambda \vec{z}_2 = \vec{0}$$

En projection

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{z}_2 : L_3 \sin \theta_{32}(t) - L_4 \sin \theta_{54}(t) = 0 \\ \text{sur } \vec{z}_2 : L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4 \cos \theta_{54}(t) - \lambda(t) = 0 \end{cases}$$

On élimine $\theta_{43}(t)$ en élevant au carré :

$$\underbrace{(L_4 \sin \theta_{43})^2 + (L_4 \cos \theta_{43})^2}_{L_4^2} = (L_3 \sin \theta_{32})^2 + (\lambda - L_3 \cos \theta_{32})^2$$

On ne développe pas !!!

$$(\lambda - L_3 \cos \theta_{32})^2 = L_4^2 - (L_3 \sin \theta_{32})^2$$

2 solutions

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} \pm \sqrt{L_4^2 - (L_3 \sin \theta_{32})^2}$$

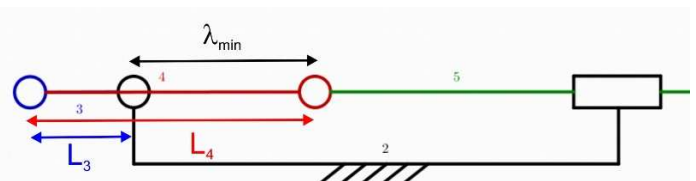
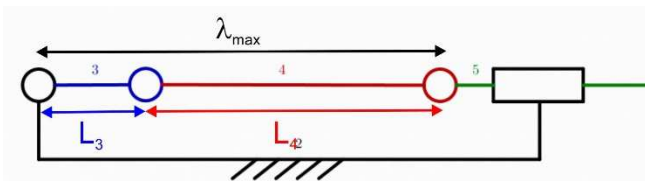
D'après le schéma cinématique et le paramétrage λ doit être positif, on en déduit :

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2}$$

Q19. Amplitude des oscillations de la lame, notée Δz . Application numérique et respect de l'exigence 1.2.2.3. $\lambda_{\max}$ pour $\theta_{32} = 0$; $\lambda_{\min}$ pour $\theta_{32} = \pi$:

$$\Delta z = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = (L_3 + L_4) - (-L_3 + L_4) = 2L_3 \quad \boxed{\Delta z = 2L_3}$$

Ce que l'on peut trouver directement par lecture du schéma cinématique :

Application numérique : $\Delta z = 2 \times 12,5 = 25 \text{ mm} > 20 \text{ mm}$. L'exigence 1.2.2.3 est respectée

Q20. Rapport $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$ comparé à la valeur 1. Simplification de la loi : $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4(t)$.

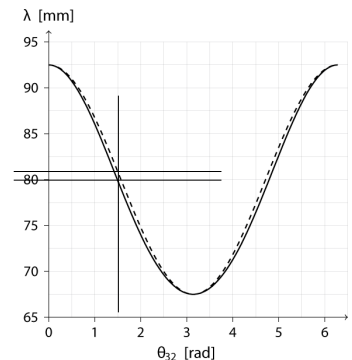
Numériquement le rapport $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2 = \left(\frac{80}{12.5}\right)^2 = 40,9 \gg 1$. Donc $\left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2 \ll 1$.

L'expression de la question 17 peut donc s'écrire : $\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4$

Q21. Conclusion sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude

Les valeurs maximales et minimales sont identiques pour la position théorique et pour la position approximée.

L'écart maximal vaut environ 1/25 soit 4 %. On peut donc valider l'approximation pour la position



Q22. Expression littérale de $\dot{\lambda}(t)$ à partir du modèle simplifié de $\lambda(t)$.

On dérive $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4(t)$:

$$\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_{32} L_3 \sin \theta_{32} = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$$

Q23. Validation de l'exigence 1.2.2.4. ?

La valeur maximale théorique est de 4m/s (figure 11).

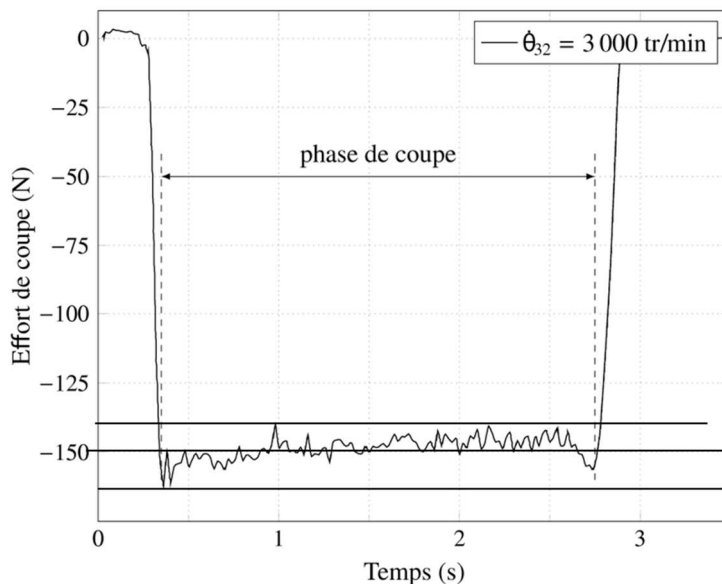
La valeur maximale du système simplifié est de 3.9m/s (figure 11).

L'exigence 1.2.2.4 impose $4\text{m/s} \pm 5\%$ soit $3.8\text{m/s} < \dot{\lambda} < 4.2\text{m/s}$

L'exigence 1.2.2.4 est donc respectée avec le modèle simplifié.

PARTIE III-2 Modélisation du comportement dynamique de la tête de coupe

Q24. Durant la phase de coupe, Valeurs moyenne, maximale et minimale de l'effort de coupe.



En norme :

**Valeur maximale: 162.5N
Valeur minimale : 140N
Valeur moyenne : 150 N**

Q25. Validation de l'exigence 1.2.1.1.

Variation de l'effort de coupe :

$$\frac{\text{max} - \text{min}}{\text{moy}} = \frac{162.5 - 140}{150} = 15\%$$

L'effort de coupe varie donc de $\pm 7.5\% < \pm 10\%$ par rapport à la valeur moyenne, l'exigence 1.2.1.1 est respectée

Commentaires

En dynamique : théorème généraux ou TEC, la démarche consiste à calculer :

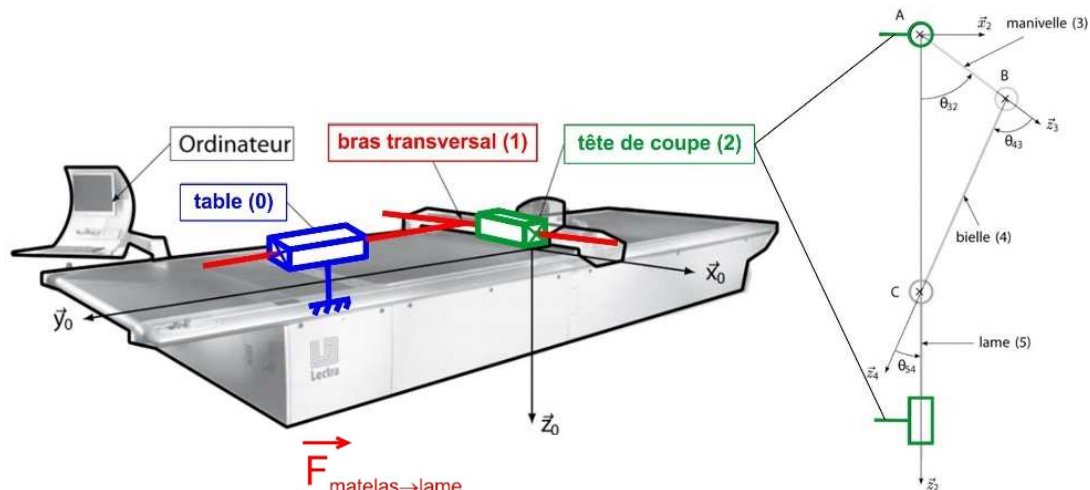
1. La résultante dynamique, le moment dynamique ou l'énergie cinétique
2. La somme des forces extérieures, la somme des moments extérieurs ou les puissances ext + int
3. Relier par application des théorèmes généraux ou TEC, ce qui a été calculé en 1. et 2. afin d'en déduire des relations entre les actions mécaniques et les paramètres du mouvement.

⚠ NE JAMAIS calculer/déduire l'énergie cinétique, la résultante dynamique ou le moment dynamique à partir des théorèmes généraux ou TEC (2. + 3.) (parce que ça vous semblerez plus simple...) . Vous n'arriverez jamais au bout, vous en avez besoin pour appliquer les théorèmes de la dynamique !

Traduction de l'énoncé

Conseils :

Traduire rapidement l'énoncé, dans la présentation l'énoncé parle de translation, **représenter** les glissières associée. Toujours **commencer** les questions de mécanique avec un modèle propre si possible un graphe des liaisons.



Remarques :

- Attention ici l'énoncé impose d'isoler {3,4,5}
 ≠ « tout ce qui bouge » !
- Semble-t'il la glissière entre (1) et (2) n'est pas prise en compte car $\vec{V}_{lame/table} = V_a \cdot \vec{y}_0 + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_0$.

Q26. Déterminer l'énergie cinétique T_{i/R_0} par rapport au bâti 0 pour chaque solide $i \in [3, 4, 5]$.

Si on suit l'énoncé, **ce qu'il faut faire**, les énergies cinétiques s'expriment par :

$$T_{4/R_0} = 0$$

(Masse et inertie du solide 4 négligées)

$$2. T_{5/R_0} = M_5 (V_a^2 + \dot{\lambda}^2)$$

(5) en translation selon $\vec{z}_0$ par rapport à (2), et (2) en translation selon $\vec{y}_0$ par rapport à R0

$$2. T_{3/R_0} = M_3 V_a^2 + J_3 \omega_{32}^2$$

(3) en rotation / (A $\vec{y}_0$) par rapport à (2), et (2) en translation selon $\vec{y}_0$ par rapport à R0

Détail du calcul de $2.T_{3/R_0}$:

$$2.T_{3/R_0} = \{C_{(3/0)}\}_{VP} \otimes \{V_{(3/0)}\}_{VP} = \overrightarrow{R_{c(3/0)}} \cdot \overrightarrow{V_{A(3/0)}} + \overrightarrow{\sigma_{A(3/0)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$

$$\text{Calcul en A: } \{V_{(3/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ V_a \cdot \overrightarrow{y_0} \end{matrix} \right\}_A \text{ car } \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \text{ et } \{C_{(3/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{c(3/0)}} = M_3 \cdot \overrightarrow{V_{G3(3/0)}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A(3/0)}} \end{matrix} \right\}_A$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{R_{c(3/0)}} = M_3 \cdot \overrightarrow{V_{G3(3/0)}} = M_3 \cdot [\overrightarrow{V_{A(3/0)}} + \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{AG_3}]$$

$$\text{et } \overrightarrow{\sigma_{A(3/0)}} = \mathbf{I}_{(A,3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} + M_3 \cdot \overrightarrow{AG_3} \wedge \overrightarrow{V_{A(3/0)}} = \mathbf{I}_{(A,3)} \cdot \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} + M_3 \cdot \overrightarrow{AG_3} \wedge V_a \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$2.T_{3/R_0} = (M_3 \cdot [\overrightarrow{V_{A(3/0)}} + \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{AG_3}]) \cdot V_a \cdot \overrightarrow{y_0} + (\mathbf{I}_{(A,3)} \cdot \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} + M_3 \cdot \overrightarrow{AG_3} \wedge V_a \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\text{Or } (\omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{AG_3}) \cdot V_a \cdot \overrightarrow{y_0} = 0 \text{ et } (M_3 \cdot \overrightarrow{AG_3} \wedge V_a \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \omega_{3/2} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$$

$$\boxed{2.T_{3/R_0} = M_3 \cdot V_a^2 + J_3 \cdot \omega_{3/2}^2}$$

Raisonnement on peut choisir le référentiel galiléen R2 car la tête de coupe 2 est en translation rectiligne uniforme par rapport à R0, ainsi, on isole « tout ce qui bouge », les énergies cinétiques deviennent :

$$\mathbf{T}_{4/R_2} = \mathbf{0} \quad (\text{Masse et inertie du solide 4 négligées})$$

$$2.T_{5/R_2} = M_5 \cdot \dot{\lambda}^2 \quad (5) \text{ en translation selon } \overrightarrow{z_0} \text{ par rapport à } (2)$$

$$2.T_{3/R_2} = J_3 \cdot \omega_{32}^2 \quad (3) \text{ en rotation / } (A \overrightarrow{y_0}) \text{ par rapport à } (2)$$

Q27. Energie cinétique de l'ensemble $S = \{3, 4, 5\}$ par rapport au bâti 0, sous la forme $T_{S/R_0} = \frac{1}{2} J_{eq} (\theta_{32}) \omega_{32}^2 + \frac{1}{2} M_{eq} V_a^2$

L'énergie de l'ensemble est la somme des énergies cinétiques :

$$T_{S/R_0} = T_{3/R_0} + T_{4/R_0} + T_{5/R_0}$$

$$2.T_{S/R_0} = M_3 V_a^2 + J_3 \omega_{32}^2 + M_5 (V_a^2 + \dot{\lambda}^2) \quad \text{avec } \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$$

$$2.T_{S/R_0} = M_3 V_a^2 + J_3 \omega_{32}^2 + M_5 (V_a^2 + (\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32})^2)$$

$$2.T_{S/R_0} = (M_3 + M_5) V_a^2 + (J_3 + M_5 (L_3 \sin \theta_{32})^2) \omega_{32}^2 = M_{eq} V_a^2 + J_{eq} (\theta_{32}) \omega_{32}^2$$

$$\text{Avec } J_{eq} = J_3 + M_5 (L_3 \sin \theta_{32})^2 \quad (\text{attention } J_{eq} \text{ n'est pas une constante}) \text{ et } M_{eq} = (M_3 + M_5)$$

Par rapport au référentiel galiléen R2 :

$$2.T_{S/R_2} = M_5 \cdot \dot{\lambda}^2 + J_3 \cdot \omega_{32}^2 = (M_5 \cdot (L_3 \sin \theta_{32})^2 + J_3) \cdot \omega_{32}^2 \text{ et } J_{eq} = J_3 + M_5 (L_3 \sin \theta_{32})^2 \text{ et } M_{eq} = 0$$

Q28. Expressions littérales des puissances intérieures P_{int} et extérieures au système S par rapport au bâti 0, $P_{ext \rightarrow S/R_0}$.

Rappel : on calcule les puissances extérieures galiléennes (par rapport au référentiel galiléen, utiles pour le TEC) et les puissances intérieures (indépendantes du référentiel)

On isole $S = \{3, 4, 5\}$ (voir graphe des liaisons page précédente) , bilan des puissances :

$P_{(ext \rightarrow S/0)}$	$P_{(Int \rightarrow S)}$
$P_{2 \rightarrow 3/0} = ?$	$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = 0 \text{ (LP)}$
$P_{2 \rightarrow 5/0} = ?$	$P_{(4 \leftrightarrow 5)} = 0 \text{ (LP)}$
$P_{pesanteur \rightarrow S/R_0} = 0^*$	
$P_{moteur \rightarrow 3/R_0} = C_m \omega_{32}$	
$P_{matelas \rightarrow 5/R_0}$	

LP : liaison parfaite, *action de la pesanteur négligée

Rappel :

Calcul de la puissance des inter-efforts dans une liaison parfaite

$$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = P_{(3 \rightarrow 4/0)} + P_{(4 \rightarrow 3/0)}$$

$$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = \{T_{3 \rightarrow 4}\} \otimes \{V_{(4/0)}\} + \{T_{4 \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{(3/0)}\}$$

$$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = \{T_{3 \rightarrow 4}\} \otimes \{V_{(4/0)}\} - \{T_{3 \rightarrow 4}\} \otimes \{V_{(3/0)}\}$$

$$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = \{T_{3 \rightarrow 4}\} \otimes [\{V_{(4/0)}\} - \{V_{(3/0)}\}]$$

$$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = \{T_{3 \rightarrow 4}\} \otimes \{V_{(4/3)}\} = 0 \text{ car liaison parfaite}$$

Mais $P_{2 \rightarrow 3/0} = \{T_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{(3/0)}\} \neq 0$ même si la liaison est parfaite !

En général on isole « tout ce qui bouge » et on aurait

$$P_{0 \rightarrow 3/0} = \{T_{0 \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{(3/0)}\} = 0 !$$

Détails des calculs :

- $P_{2 \rightarrow 3/0} = \{T_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{(3/0)}\} = \underbrace{\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot V_a \cdot \vec{y}_0}_{\neq 0} + \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \cdot \omega_{3/2} \cdot \vec{y}_0 = ? \text{ car } \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 = 0 \text{ mais } \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 \neq 0$
- $P_{2 \rightarrow 5/0} = \{T_{2 \rightarrow 5}\} \otimes \{V_{(5/0)}\} = \underbrace{\vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot V_a \cdot \vec{y}_0}_{\neq 0} + \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \dot{\lambda}(t) \vec{z}_0 + \vec{M}_{A,2 \rightarrow 5} \cdot \vec{0} = ? \text{ car } \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{z}_0 = 0 \text{ mais } \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{y}_0 \neq 0$
- $P_{\text{moteur} \rightarrow 3/R_0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_{02} \end{array} \right\}_{VP} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_{3/2} \cdot \vec{y}_0 \\ V_a \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A = C_m \omega_{32}$
- $P_{\text{matelas} \rightarrow 5/R_0} = \{T_{\text{matelas} \rightarrow 5}\} \otimes \{V_{5/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_a \cdot \vec{y}_0 + F_c \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_a \cdot \vec{y}_0 + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_C = F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c$

Si on suit l'énoncé on ne peut pas dire que les puissances galiléennes dans les liaisons 2-3 et 2-5 sont nulles (pb quand on n'isole pas « tout ce qui bouge... »)!

Choix 1 (à faire le jour du concours), on suppose $P_{2 \rightarrow 3/0} = 0$ et $P_{2 \rightarrow 5/0} = 0$.

On en déduit : $P_{\text{ext} \rightarrow S/R_0} = C_m \omega_{32} + F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c = C_m \omega_{32} + F_a V_a - \omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} F_c$

Choix 2 (pour satisfaction intellectuelle), on calcule $P_{2 \rightarrow 3/0}$ et $P_{2 \rightarrow 5/0}$.

Pour déterminer $P_{2 \rightarrow 3/0} = ?$ et $P_{2 \rightarrow 5/0} = ?$ c'est-à-dire $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{y}_0$, isolons S en mouvement dans R0 galiléen ,

BAME :

- Pesanteur négligée
- $\{T_{\text{matelas} \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_a \cdot \vec{y}_0 + F_c \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
- $\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \end{array} \right\}_A, \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 = 0$
- $\{T_{2 \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \\ \vec{M}_{P,2 \rightarrow 5} \end{array} \right\}_{VP}, \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{z}_0 = 0$
- $\{T_{\text{moteur} \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{y}_{02} \end{array} \right\}_{VP}$

Appliquons le TRD projeté sur $\vec{y}_0$: $F_a + \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{y}_0 = M_5 \cdot \vec{a}_{G5/0} \cdot \vec{y}_0 + M_3 \cdot \vec{a}_{G3/0} \cdot \vec{y}_0$ (masse de 4 négligée)

$\vec{a}_{G5/0} \cdot \vec{y}_0 = 0$ car $\vec{a}_{G5/0} = \ddot{\lambda} \cdot \vec{z}_0$

$$\vec{a}_{G3/0} \cdot \vec{y}_0 = \frac{d}{dt} ((\underbrace{\vec{V}_{A(3/0)}}_{V_a \cdot \vec{y}_0} + \omega_{3/2} \cdot \vec{y}_0 \wedge \vec{AG}_3)) \cdot \vec{y}_0 = 0$$

D'où $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{2 \rightarrow 5} \cdot \vec{y}_0 = -F_a \rightarrow P_{2 \rightarrow 3/0} + P_{2 \rightarrow 5/0} = -F_a \cdot V_a$

Par rapport au référentiel galiléen R2 :

$P_{(\text{ext} \rightarrow S/2)}$	$P_{(\text{Int} \rightarrow S)}$
$P_{2 \rightarrow 3/2} = 0 \text{ (LP)}$	$P_{(3 \leftrightarrow 4)} = 0 \text{ (LP)}$
$P_{2 \rightarrow 5/2} = 0 \text{ (LP)}$	$P_{(4 \leftrightarrow 5)} = 0 \text{ (LP)}$
$P_{\text{pesanteur} \rightarrow S/2} = 0$	
$P_{\text{moteur} \rightarrow 3/2} = C_m \omega_{32}$	
$P_{\text{matelas} \rightarrow 5/2} = \dot{\lambda}(t) F_c$	

Q29. Théorème de l'énergie cinétique et Expression littérale du couple moteur $C_m(t)$.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à S s'écrit : $\frac{dT(S/0)}{dt} = P_{(Int \rightarrow S)} + P_{ext \rightarrow S/0}$

$$\frac{dT(S/0)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(M_3 V_a^2 + J_3 \omega_{32}^2 + M_5 (V_a^2 + \dot{\lambda}^2))}{dt} = J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} \text{ car } V_a = cte$$

$$J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} = C_m \omega_{32} + \cancel{F_a V_a} + \dot{\lambda}(t) F_c - \cancel{F_a V_a}$$

Si calcul propre des puissances dans les liaisons 2-3 et 2-5

$$C_m = \frac{J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - \dot{\lambda} F_c - \cancel{F_a V_a}}{\omega_{32}}$$

$$\text{avec } \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} \quad \text{et } \ddot{\lambda}(t) = -\dot{\omega}_{32} L_3 \sin \theta_{32} - \omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}$$

Par rapport au référentiel galiléen R2 : $\frac{dT(S/2)}{dt} = P_{(Int \rightarrow S)} + P_{ext \rightarrow S/2}$

$$\frac{dT(S/2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(J_3 \omega_{32}^2 + M_5 \dot{\lambda}^2)}{dt} = J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda}$$

$$J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} = C_m \omega_{32} + \dot{\lambda}(t) F_c$$

$$C_m = \frac{J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - \dot{\lambda} F_c}{\omega_{32}}$$

Même résultat, mais faites toujours ce que le sujet vous suggère.

Q30. Expression du couple moteur en régime permanent ($\dot{\theta}_{32} = cte$)

$$C_m = [F_c + M_5 L_3 \dot{\theta}_{32}^2 \cos \theta_{32}] L_3 \sin \theta_{32}$$

En régime permanent : $\dot{\theta}_{32} = cte$, et $\dot{\omega}_{32} = 0$

$$C_m = \frac{M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - \dot{\lambda} F_c - \cancel{F_a V_a}}{\omega_{32}} \quad \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} \quad \ddot{\lambda}(t) = -\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}$$

$$C_m = \frac{M_5 (-\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}) + \omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} F_c - \cancel{F_a V_a}}{\omega_{32}}$$

$$C_m = M_5 (-L_3 \sin \theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}) + L_3 \sin \theta_{32} F_c - \frac{\cancel{F_a V_a}}{\omega_{32}}$$

$$C_m = (M_5 \omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32} + F_c) L_3 \sin \theta_{32} - \frac{\cancel{F_a V_a}}{\omega_{32}}$$

A mon avis la formule de l'énoncé est fausse, car les puissances $P_{2 \rightarrow 3/0}$ et $P_{2 \rightarrow 5/0}$ ont été considérées nulles à tort...

Q31. Couple moteur non constant en régime permanent. Conséquence sur le comportement du système.

Le coulisseau a un mouvement de va et vient donc même en régime permanent (vitesse de rotation constante du moteur) l'accélération du coulisseau n'est pas constante.

De plus la pesanteur, négligée en première approximation, sur le coulisseau sera motrice durant la phase de descente et résistante durant la phase de montée.

Ces 2 phénomènes sont à l'origine du couple moteur variable en régime permanent et vont provoquer des vibrations.

PARTIE IV-1 Analyse théorique du phénomène vibratoire

Q32. Expression des vecteurs vitesses $\vec{V}(G_3, 3/2)$ et $\vec{V}(G_5, 5/2)$ en fonction de $\dot{\lambda}$, $\dot{\theta}_{32}$ et des données géométriques.

$$\vec{V}(G_3, 3/2) = \vec{V}(A, 3/2) + \vec{\Omega}_{(3/2)} \wedge \overrightarrow{AG_3} = \omega_{32} \vec{y}_3 \wedge a_3 \vec{z}_3 \rightarrow \boxed{\vec{V}(G_3, 3/2) = a_3 \omega_{32} \vec{x}_3}$$

$$\vec{V}(G_5, 5/2) = \frac{d\overrightarrow{AG_5}}{dt/R_2} = \frac{d(\lambda(t) \vec{z}_{02} + a_5 \vec{z}_{02})}{dt/R_2} \rightarrow \boxed{\vec{V}(G_5, 5/2) = \dot{\lambda} \cdot \vec{z}_{02}}$$

Erreur dans le sujet $\overrightarrow{CG_5} = a_5 \vec{z}_0$

Q33. Expression de la résultante dynamique $\vec{R}_d(S/0)$ de l'ensemble $= \{3, 4, 5\}$ dans le référentiel lié à la table.

La résultante dynamique de l'ensemble est la somme des résultantes dynamiques :

$$\vec{R}_d(S/0) = \vec{R}_d(3/0) + \vec{R}_d(4/0) + \vec{R}_d(5/0)$$

- $\vec{R}_d(4/0) = \vec{0}$ (masse et inertie de 4 négligée)
- $\vec{R}_d(5/0) = M_5 \cdot \vec{a}(G_5, 5/0) = M_5 \cdot \ddot{\lambda} \cdot \vec{z}_{02}$ car $\vec{a}(G_5, 5/0) = \frac{d}{dt/0} \left(\vec{V}(G_5, 5/2) + \underbrace{\vec{V}(G_5, 2/0)}_{V_a \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}} \right)$
- $\vec{R}_d(3/0) = M_3 \vec{a}(G_3, 3/0) = M_3 \left(a_3 \underbrace{\dot{\omega}_{32}}_0 \vec{x}_3 + a_3 \omega_{32} \left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_0 \right) = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \vec{z}_3$
car $\vec{a}(G_3, 3/0) = \frac{d}{dt/0} \left(\vec{V}(G_3, 3/2) + \underbrace{\vec{V}(G_3, 2/0)}_{V_a \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}} \right)$

$$\vec{R}_d(S/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \vec{z}_3 \quad \boxed{\vec{R}_d(S/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 a_3 \omega_{32}^2 (\cos \theta_{32} \vec{z}_2 + \sin \theta_{32} \vec{x}_2)}$$

Q34. Expression du maximum de chacune des composantes de la résultante dynamique $\vec{R}_d(S/0)$ sur $\vec{x}_2$ et $\vec{z}_2$.

$$\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2 = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \sin \theta_{32} \quad \text{la valeur maximale est donnée pour } \sin \theta_{32} = -1$$

$$(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} = M_3 a_3 \omega_{32}^2 \quad \boxed{(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} = M_3 a_3 \omega_{32}^2}$$

Application numérique : $(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} = 0,35 * 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi}{60} \right)^2 = 17N$

$$\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2 = M_5 \ddot{\lambda} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} = -M_5 L_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} \text{ car } \lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4$$

la valeur maximale est donnée pour $\cos \theta_{32} = -1$

$$\boxed{(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = (M_5 L_3 + M_3 a_3) \omega_{32}^2}$$

Application numérique : $(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = (0,1 * 0,0125 + 0,35 * 0,5 \cdot 10^{-3}) \cdot \left(\frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi}{60} \right)^2 = 140N$

Q35. Comparaison des deux maxima, pièce à l'origine des vibrations.

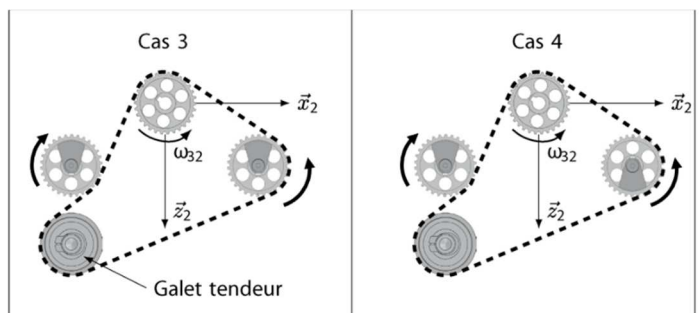
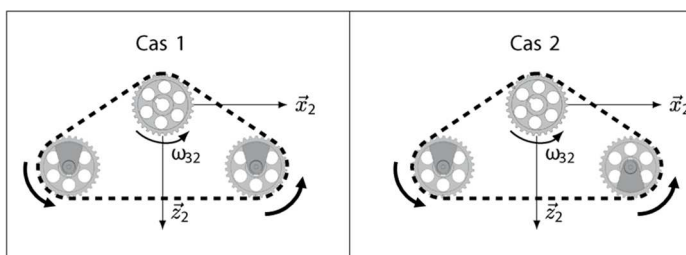
$$(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} \gg (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} \rightarrow (M_5 L_3 + M_3 a_3) \omega_{32}^2 \gg M_3 a_3 \omega_{32}^2$$

L'origine des vibrations est la pièce 5

PARTIE IV-2 Modélisation du comportement mécanique de la tête de coupe en version améliorée

On cherche à s'opposer aux vibrations existantes selon $\vec{z}_2$ sans en ajouter selon $\vec{x}_2$.

Q36. Sens de rotation de la masse excentrée.



Q39. Composantes suivant $\vec{x}_2$ et $\vec{z}_2$ de la résultante dynamique des masses excentrées dans le référentiel lié à la table.

On pose $\vec{OG}_i = r\vec{z}_i$ avec $i = g$ ou d

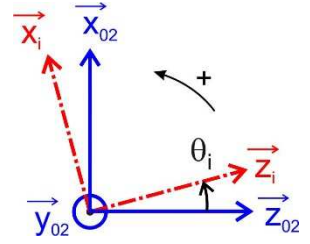
$$\vec{V}(G_i, \text{roue}/0) = r\dot{\theta}_i\vec{x}_i \text{ et } \vec{a}(G_i, \text{roue}/0) = -r\dot{\theta}_i^2\vec{z}_i \quad (\text{rappel } \ddot{\theta}_i = 0)$$

On en déduit pour la masse g : $\vec{R}_d(m_g/0) = -m r\dot{\theta}_g^2\vec{z}_g = -mr\dot{\theta}_g^2(\cos\theta_g\vec{z}_2 + \sin\theta_g\vec{x}_2)$

On en déduit pour la masse d : $\vec{R}_d(m_d/0) = -mr\dot{\theta}_d^2\vec{z}_d = -mr\dot{\theta}_d^2(\cos\theta_d\vec{z}_2 + \sin\theta_d\vec{x}_2)$

$$\text{Sur } \vec{x}_2 : \vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{x}_2 = -mr\dot{\theta}_g^2\sin\theta_g - mr\dot{\theta}_d^2\sin\theta_d$$

$$\text{Sur } \vec{z}_2 : \vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{z}_2 = -mr\dot{\theta}_g^2\cos\theta_g - mr\dot{\theta}_d^2\cos\theta_d$$



Q41. Expression de la masse m pour respecter l'exigence 1.2.2.2.

Exigence 1.2.2.2 : « La résultante dynamique de l'ensemble de la tête de coupe doit être au maximum de 40N sur $\vec{z}_0$ »

$$\vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{z}_2 + (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = -mr\dot{\theta}_g^2\cos\theta_g - mr\dot{\theta}_d^2\cos\theta_d + 140 = 40$$

$$\text{Rappel } (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = 140N \text{ (Q 34)}$$

$$\theta_g = -\theta_d \rightarrow 2mr\dot{\theta}_g^2\cos\theta_g = 100 \rightarrow \boxed{m = \frac{100}{2 \cdot r \cdot \dot{\theta}_g^2}}$$

Application numérique :

$$m = \frac{100}{2 \cdot 0,008 \cdot \left(\frac{3000 \cdot 2 \cdot \pi}{60}\right)^2} = 0,063 \text{ kg} = \mathbf{63g}$$

Q42. Evolution de l'effort de coupe en régime permanent en fonction de la vitesse de rotation du moteur.

Si on double la vitesse de rotation du moteur (3000 tr/min $\rightarrow$ 6000 tr/min) l'effort de coupe devrait être multiplié par 4 (la vitesse de rotation du moteur ω_{32} apparaît au carré)

Q43. Conclusion sur l'utilité des masses excentrées mises en place sur la tête de coupe en version améliorée.

D'après la figure 16 l'effort de coupe moyen en norme pour le système amélioré est de 80 N alors que la vitesse de rotation est de 6000 tr/min, en version initiale on devrait avoir 4*160 N.

Les masselottes d'équilibrage permettent donc de diviser par 8 l'effort de coupe sur la version améliorée par rapport à la version initiale.

Q44. Synthèse de la démarche d'identification du phénomène vibratoire et la validation de la solution retenue en regard du cahier des charges.

Questions 17 à 25 : validation par rapport à l'exigence 1.2.1.1 de la loi simplifiée de mouvement (vitesse et position)

Questions 26 à 31 : mise en évidence de la présence de vibrations dues au mouvement alternatif du coulisseau et à la pesanteur

Questions 32 à 41 : mise en évidence de l'apport des masselottes d'équilibrage et détermination de leur position et de leur masse pour respecter l'exigence 1.2.2.2

Questions 41 à 43 : validation de l'utilité des masselottes d'équilibrage par comparaison de l'effort de coupe sur les modèles initial à la vitesse de 3000 tr/min et amélioré à la vitesse de 6000 tr/min.