

Corrigé DS 3 - Concours Blanc MP*

L'inverseur de poussée ETRAS (MINES-PONTS MP 2024)

2 Mise en situation du système étudié avec comparaison aux autres systèmes de freinage

Q 1. À partir des données du problème, **déterminer** une expression de la décélération, notée a , en fonction des grandeurs du problème. **Indiquer** l'isolement réalisé et la méthode utilisée.

On isole l'**avion** en mouvement de translation dans le référentiel galiléen lié à la piste.

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- pesanteur : $\left\{ \mathcal{T}_{(\text{pesanteur} \rightarrow a)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$
- action du sol sur les 22 roues en I_i : $\sum \left\{ \mathcal{T}_{(\text{sol} \rightarrow R_i)} \right\} = \sum \left\{ \begin{matrix} T_i \cdot \vec{x} + N_i \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_i}$
- action de l'air sur l'avion : $\left\{ \mathcal{T}_{(\text{aerodyn} \rightarrow a)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2 \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$.

1. On applique le Théorème de la résultante dynamique suivant $\vec{x}$:

$$M \cdot a(t) = \sum T_i - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2$$

2. On applique le Théorème de la résultante dynamique suivant $\vec{y}$:

$$0 = -M \cdot g + \sum N_i$$

Avec à la limite du glissement $\sum T_i = -f \cdot \sum N_i$, car le frottement s'oppose au mouvement des roues de l'avion par rapport au sol, on obtient :

$$a(t) = -f \cdot g - \frac{1}{2M} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2$$

Commentaires :

"En fonction des grandeurs du problème" sous-entend qu'il ne doit plus y avoir d'inconnues de liaison.

Q 2. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrée entre l'instant initial et l'instant final (arrêt de l'avion) noté T, **montrer** que la variation d'énergie cinétique est égale à la somme de deux termes, le travail des actions de frottement noté W_f et le travail des actions aérodynamiques noté W_a dont on donnera les expressions intégrales sans les calculer ou les simplifier. **Calculer** numériquement l'énergie cinétique totale à dissiper au cours de l'atterrissage.

On isole {avion + roues Ri} = a .

- Energie cinétique $T_{(a/R_g)}$ ($= E_{c(a/R_g)}$) de l'ensemble isolé :

L'avion est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au sol considéré comme galiléen, donc

$$T_{(a/R_g)} = \frac{1}{2} M \cdot v(t)^2$$

- Bilan de puissances :

$P_{\text{ext} \rightarrow a/R_g}$	$P_{\text{int}(a)}$
$P_{\text{pes} \rightarrow a/R_g} = 0$ car $\vec{g} \perp \vec{v}_{a/R_g}$ $P_f = P_{\text{frott sol} \rightarrow Ri/R_g} = -f \cdot M \cdot g \cdot v$ $P_a = P_{\text{aero} \rightarrow a/R_g} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^3$	$P_{Ri \leftrightarrow \text{cellule}} = 0$ LP cellule = "chassis" de l'avion Ri = Roue i

- On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT_{(a/R_g)}}{dt} = P_{\text{ext} \rightarrow a/R_g} + P_{\text{int}(a)} = P_f + P_a$$

- On intègre cette égalité de $t = 0$ à T :

$$\Delta T_{(a/R_g)} = T_{(a/R_g)}(T) - T_{(a/R_g)}(0) = \int_0^T P_f \cdot dt + \int_0^T P_a \cdot dt$$

On obtient alors :

$$W_f = \int_0^T P_f \cdot dt = -f \cdot M \cdot g \int_0^T v(t) \cdot dt$$

$$W_a = \int_0^T P_a \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \int_0^T v(t)^3 \cdot dt$$

- Enfin, la vitesse finale étant nulle et la vitesse initiale valant V_a , l'énergie cinétique totale à dissiper vaut :

$$T_{(a/R_g)}(t=0) = \frac{1}{2} M \cdot V_a^2$$

Application numérique : $T_{(a/R_g)}(t=0) = \frac{400 \cdot 10^3}{2} \cdot \frac{260^2}{3,6} \approx 1,04 \cdot 10^9 \text{ J} = 1,04 \text{ GJ}$

Q 3. Compléter les lignes **13, 14, 15, 18** du programme donné sur le cahier réponse en utilisant une méthode d'Euler explicite pour calculer la vitesse v , la position (x) et l'énergie (W_a).

ligne 13 : **while** $v > 0$:

ligne 15 : $x.append(x[-1]+pas*v)$

ligne 14 : $v = v+pas*F(v)$

ligne 16 : $W_a.append(W_a[-1]+pas*A1*M*v**3)$

Q 4. Justifier l'allure de la courbe $W_f(x)$.

L'avion est en phase de freinage, donc en mouvement, les actions de contact entre les 22 roues et le sol sont sur le cône de frottement. Ainsi, durant toute la phase de freinage, les actions de frottement sont constantes.

Le travail des forces de frottement est donc égal à la norme de ces force multipliée par le déplacement puis par le cosinus de l'angle entre le déplacement et ces forces. Il vaut donc :

$$W_f = -f \cdot M \cdot g \cdot x(t)$$

Sur la courbe proposée, on a bien un travail proportionnel au déplacement.

Q 5. Comparer la première Figure (6.a) (sans inverseur de poussée sur piste sèche) avec la courbe des travaux de la Figure (5) (allure, valeur finale). **Donner** approximativement les distances d'arrêt sur piste sèche et glacée et **commenter** les valeurs obtenues par rapport au cahier des charges.

Sans inverseur de poussée, sur piste sèche (figure 6.a), on trouve le même ordre de grandeur de distance d'arrêt que la simulation numérique (fig 5). Le coefficient de frottement entre les roues et le sol utilisé dans la simulation doit être celui pour une piste sèche.

Il est difficile de conclure sur l'allure des courbes mais les travaux sont soit linéaire (frottement) soit polynomial (air). Il semble en être de même pour la dissipation d'énergie.

	Sans inverseur		Avec inverseur	
	Distance d'arrêt	Validation	Distance d'arrêt	Validation
Piste sèche	≈ 750 m	oui	≈ 750 m	oui
Piste glacée	≈ 3900 m	non	≈ 1100 m	oui

Un tiers de la piste devant être laissée vacante, la distance d'arrêt maximale envisageable est de 1800 m. On voit donc que sans inverseur de poussée, il ne sera pas possible de s'arrêter sur la piste dans des conditions météorologiques hivernales, ce qui est un énorme manquement au cahier des charges.

Q 6. Quantifier l'effet de la présence des inverseurs de poussée sur l'arrêt d'un avion et **justifier** l'intérêt d'avoir ce dispositif pour une compagnie aérienne.

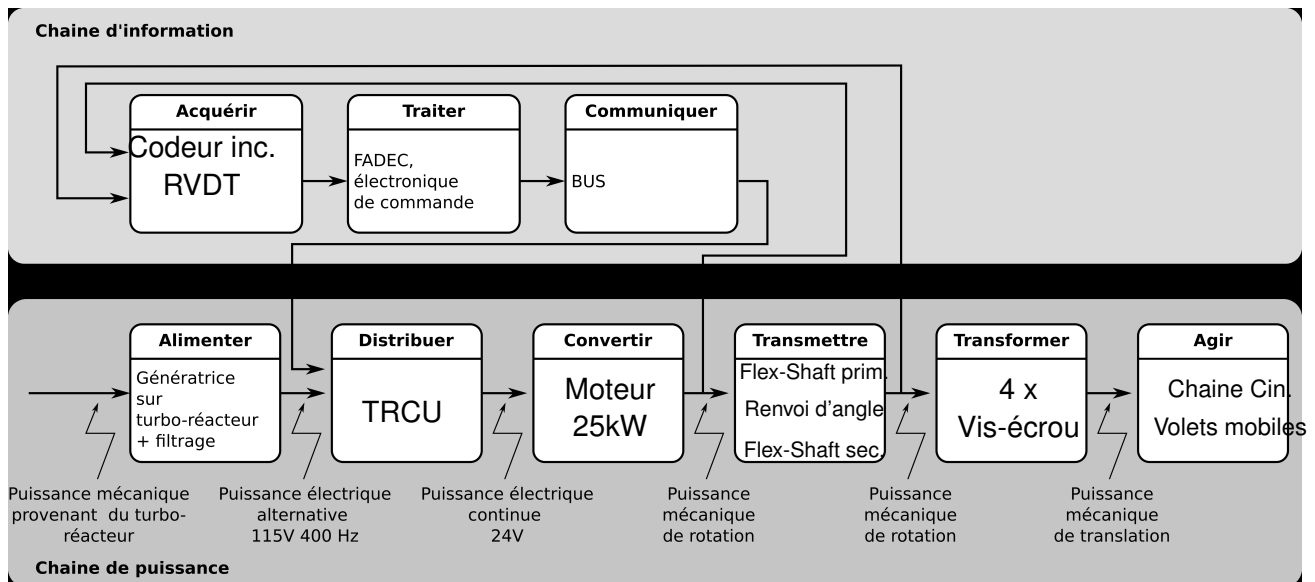
Influence de l'inverseur de poussée	
Piste sèche	Dissipation d'une partie de la puissance aerodynamique (environ la moitié).
Piste glacée	Dissipation de deux tiers de la puissance aérodynamique et de la moitié de la puissance de freinage.

Intérêt :

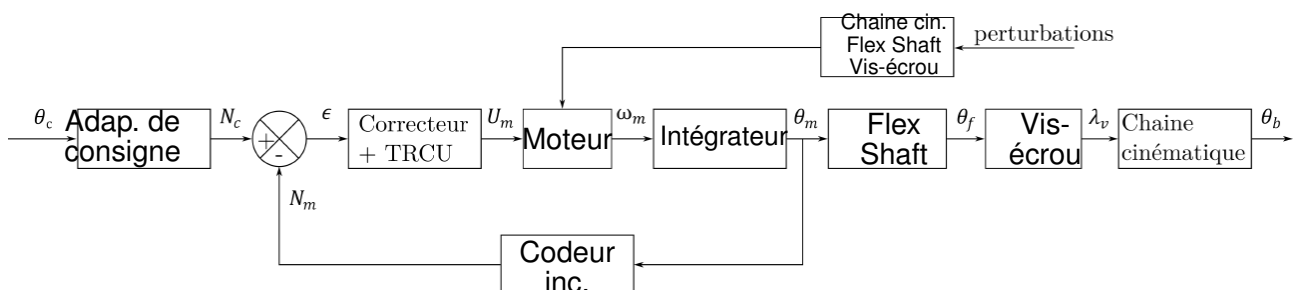
- Sur piste sèche, peu d'intérêt.
- Sur piste glacée, réduction par 3 de la distance d'arrêt. Réduction de l'usure des freins.

3 Analyse de la chaîne structurale de l'eTras®

Q 7. A partir de la description de la chaîne structurale de l'eTras®, compléter la chaîne de puissance et d'information du cahier réponse.



Q 8. A partir de la description de la modélisation de la chaîne d'asservissement, **compléter** le schéma bloc fonctionnel du cahier réponse.

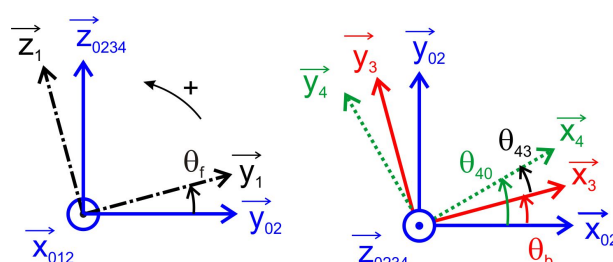


4 Modélisation du comportement du système en aval des flex-shafts

Commentaires :

La transmission par flex-shaft (arbre flexible) est un système mécanique qui permet de transmettre un mouvement de rotation d'un moteur vers un récepteur dont les axes ne sont pas parfaitement alignés, via un câble flexible rotatif contenu dans une gaine.

Q 9. Compléter les figures de changement de bases associées au paramétrage précédent.



Q 10. Déterminer l'expression de la variable de translation $\lambda(t)$ de la partie mobile de la nacelle (2) en fonction de l'angle de rotation $\theta_b(t)$ ainsi que des grandeurs géométriques constantes du système.

Commentaires :

Sous-entendu : sans autre paramètre dépendant du temps... Méthode à connaître ABSOLUMENT !

Par fermeture géométrique, on a : $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_1} = \vec{0}$

$$\lambda(t) \vec{x}_0 + L_3 \vec{x}_3 + L_4 \vec{x}_4 - L \vec{x}_0 - H \vec{y}_0 = \vec{0}$$

Par projections sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} / \vec{x}_0 : \lambda(t) + L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) + L_4 \cdot \cos(\theta_{40}) - L = 0 \\ / \vec{y}_0 : L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) + L_4 \cdot \sin(\theta_{40}) - H = 0 \end{cases}$$

En isolant les termes en θ_{40} , et en ajoutant les deux équations après les avoir élevées au carré, on obtient :

$$L_4^2 = [\lambda(t) + L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) - L]^2 + [L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) - H]^2$$

D'où : $\lambda(t) = \sqrt{L_4^2 - [L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) - H]^2} - L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) + L$

Q 11. À partir de la Figure 9, **déterminer** la course C de la partie mobile de la nacelle correspondant à l'évolution angulaire des volets puis **comparer** la valeur trouvée à la valeur du cahier des charges.

Sur la Figure 9, pour $\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$, on a :

$$\lambda_{\min} \approx 250 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} \approx 790 \text{ mm}$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{C = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} \approx 540 \text{ mm}}$$

On trouve une valeur de course qui est supérieure à 50 cm. L'exigence id 1.2.2 est vérifiée.

Q 12. Non traitée

Q 13. Déterminer la fonction de transfert $K_{cc} = \frac{\omega_b}{V_{20}}$ associée à la chaîne cinématique à partir du résultat de l'algorithme d'apprentissage supervisé présenté sur la Figure 11.

La régression linéaire donne :

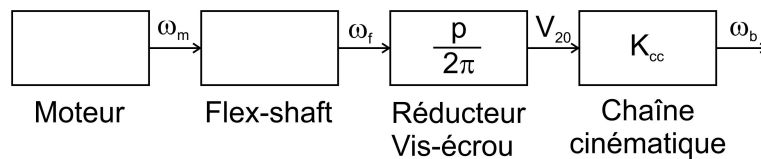
- pour $\theta_{bi} = 20^\circ$, $\lambda_{i,\min} = 400 \text{ mm}$;
- pour $\theta_{bi} = 70^\circ$, $\lambda_{i,\max} = 700 \text{ mm}$.

Ainsi :

$$\frac{\omega_b}{V_{20}} = \frac{\Delta \theta_{bi}}{\Delta \lambda} = \frac{70 - 20}{700 - 400} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0,17^\circ \cdot \text{mm}^{-1} \quad \text{et donc} \quad \boxed{K_{cc} \approx 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Q 14. À partir des données fournies et des réponses aux questions précédentes, **déterminer** l'expression du temps d'ouverture de la nacelle. **Donner** l'application numérique et **conclure** vis-à-vis du cahier des charges. On considèrera pour cette question que le moteur tourne à vitesse constante $N = N_m$.

Chaîne de transmission :



$$\frac{\Delta\theta_b}{t_{\text{ouverture}}} = \omega_b$$

Or en supposant que lorsque le moteur tourne à vitesse constante $\omega_f = \omega_m$:

$$\omega_b = \frac{K_{cc} \cdot p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$$

$$t_{\text{ouverture}} = \frac{\Delta\theta_b \cdot 2 \cdot \pi}{K_{cc} \cdot p \cdot \omega_m} = \frac{\Delta\theta_b \cdot 2 \cdot \pi}{K_{cc} \cdot p \cdot N_m \cdot 2 \cdot \pi / 60} \quad \text{et donc} \quad t_{\text{ouverture}} = \frac{60 \cdot \Delta\theta_b}{K_{cc} \cdot p \cdot N_m} = 1,8 \text{ s}$$

L'exigence id='1.1.1' impose une ouverture complète des volets en moins de 3 s. Le temps d'ouverture est bien inférieur à 3 s, **l'exigence id='1.1.1' est donc validée.**

Q 15. **Déterminer** le torseur des actions mécaniques de l'air sur un volet $\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3}$ au point O_2 exprimé dans la base B_3 .

On a le **modèle local** suivant :

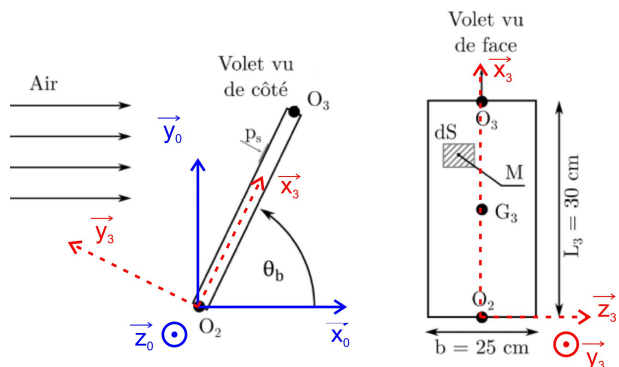
$$d\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} d\vec{R}(\text{air} \rightarrow 3) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

avec :

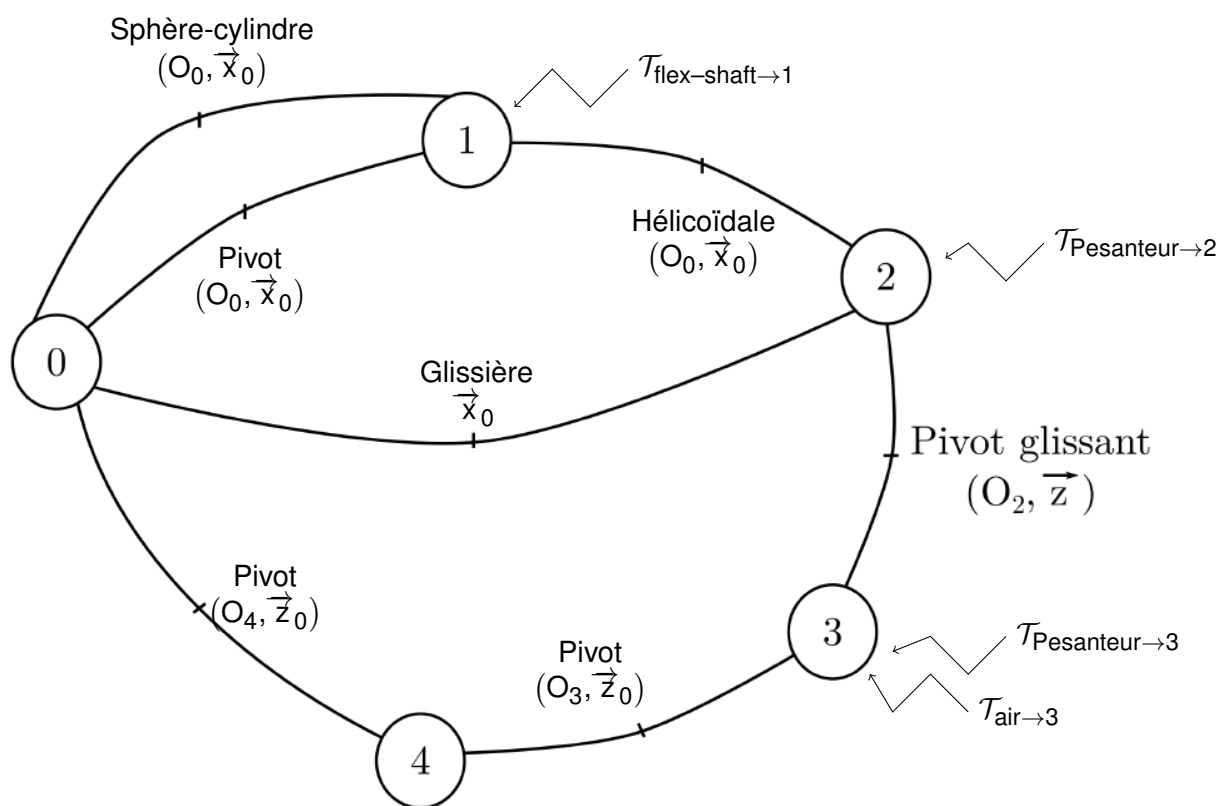
- $d\vec{R}(\text{air} \rightarrow 3) = -p_s \cdot dS \cdot \vec{y}_3$;
- $dS = dx \cdot dz$;
- $\vec{O_2M} = x \cdot \vec{x}_3 + z \cdot \vec{z}_3$;
- $x \in [0; L_3]$ et $z \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$;
- $\vec{O_2M} \wedge d\vec{R}(\text{air} \rightarrow 3) = (x \cdot \vec{x}_3 + z \cdot \vec{z}_3) \wedge -p_s \cdot dS \cdot \vec{y}_3 = p_s \cdot z \cdot dx \cdot dz \cdot \vec{x}_3 - p_s \cdot x \cdot dx \cdot dz \cdot \vec{z}_3$

En intégrant sur le domaine défini, $\int_{-b/2}^{b/2} z \cdot dz = 0$, on obtient le **modèle global** :

$$\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} -p_s \cdot L_3 \cdot b \cdot \vec{y}_3 \\ -p_s \cdot \frac{L_3^2}{2} \cdot b \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{O_2}$$



Q 16. Compléter le graphe de structure représentant le mécanisme d'ouverture de la nacelle donné sur le cahier réponse. **Faire** apparaître les liaisons manquantes ainsi que les actions mécaniques autres que celles transmissibles par les liaisons.



Q 17. Justifier la forme des matrices d'inertie $I(O_0, 1)$ et $I(G_3, 3)$.

La vis 1 est assimilable (si on néglige l'influence du filet sur l'opérateur d'inertie) à un solide de révolution d'axe $(O_0, \vec{x}_0)$. On a donc bien :

$$I(O_0, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{O_0(\vec{x}_0, -, -)}$$

Le volet 3 est un solide qui présente des symétries (seules deux sont nécessaires pour conclure) :

- de plan $(G_3, \vec{z}_0, \vec{x}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.

On a donc bien :

$$I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{G_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

Commentaires :

Tout élément de symétrie, axe ou plan, doit contenir le **point** où est exprimée la matrice d'inertie.

Q 18. Déterminer l'inertie équivalente, notée J_{eq} , de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en mouvement par rapport à 0 ramenée au niveau de l'axe de rotation de la pièce 1. **Mettre** cette inertie équivalente sous la forme $A_{eq} + B_{eq} \cdot \sin(\theta_b)$. **Indiquer** les expressions de A_{eq} et B_{eq} .

Commentaires :

L'énoncé propose la notation T pour l'énergie cinétique, on respecte donc cette notation.

On isole l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$: $T_{(\Sigma/0)} = T_{(1/0)} + T_{(2/0)} + T_{(3/0)} + T_{(4/0)}$.

On cherche J_{eq} tel que $T_{(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_f^2$.

- la masse de la bielle 4 est négligeable : $T_{(4/0)} = 0$
- la vis 1 est en rotation autour de l'axe fixe $(O_0, \vec{x}_0)$ à une vitesse ω_f : $2 \cdot T_{(1/0)} = A_1 \cdot \omega_f^2$
- l'ensemble mobile 2 est en translation rectiligne de direction $\vec{x}_0$ à une vitesse V_{20} : $2 \cdot T_{(2/0)} = M_2 \cdot V_{20}^2$
- le volet 3 ayant un mouvement quelconque : $2 \cdot T_{(3/0)} = \{C_{3/0}\} \otimes \{V_{3/0}\}$

Détail des calculs :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = \omega_b \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{V}_{G_3,3/0} = \vec{V}_{G_3,3/2} + \vec{V}_{G_3,2/0} = V_{20} \cdot \vec{x}_0 + \frac{L_3}{2} \cdot \omega_b \cdot \vec{y}_3$$

$$\{C_{3/0}\} = \left\{ \begin{matrix} M_3 \cdot \vec{V}_{G_3,3/0} \\ \vec{\sigma}_{G_3,3/0} \end{matrix} \right\}_{G_3} \quad \text{avec } \vec{\sigma}_{G_3,3/0} = I(G_3, 3) \vec{\Omega}_{3/0} = C_3 \cdot \omega_b \cdot \vec{z}_0 \text{ car } G_3 \text{ est le centre d'inertie du volet 3.}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \cdot T_{(3/0)} &= \vec{\sigma}_{G_3,3/0} \cdot \vec{\Omega}_{3/0} + M_3 \cdot \vec{V}_{G_3,3/0} \cdot \vec{V}_{G_3,3/0} \\ 2 \cdot T_{(3/0)} &= \left(C_3 \cdot \omega_b^2 + M_3 \cdot \left(V_{20}^2 + \frac{L_3^2}{4} \cdot \omega_b^2 \right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \omega_b \cdot V_{20} \cdot \sin(\theta_b) \right) \end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale de l'ensemble isolé Σ vaut :

$$2 \cdot T_{(\Sigma/0)} = A_1 \cdot \omega_f^2 + M_2 \cdot V_{20}^2 + \left(C_3 \cdot \omega_b^2 + M_3 \cdot \left(V_{20}^2 + \frac{L_3^2}{4} \cdot \omega_b^2 \right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \omega_b \cdot V_{20} \cdot \sin(\theta_b) \right)$$

Avec d'après la chaîne de transmission dessinée Q14 :

$$V_{20}^2 = V^2 = \left(\frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_f \right)^2$$

$$\omega_b^2 = (K_{cc} \cdot V)^2 = \left(K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_f \right)^2$$

$$T_{(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[A_1 + \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} (M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(C_3 + M_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} \right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \frac{K_{cc} \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \sin(\theta_b) \right]}_{J_{eq}} \cdot \omega_f^2$$

On a bien la forme demandée pour J_{eq} avec :

$$A_{eq} = A_1 + \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} (M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(C_3 + M_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} \right)$$

$$B_{eq} = -M_3 \cdot L_3 \cdot \frac{K_{cc} \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Q 19. En précisant le (ou les) solide(s) isolé(s) et **en indiquant** le théorème utilisé, **déterminer** une relation entre le couple sur la vis 1 noté C_f et les actions mécaniques de l'air sur le volet 3.

On isole l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ en mouvement dans le référentiel R_0 galiléen.

Bilan de puissances :

$P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0}$	$P_{\text{int}(\Sigma)}$
$P_{\text{pes} \rightarrow 1 / R_0} = 0$ car $\vec{V}_{G_1, 1/0} = \vec{0}$ ($G_1 \in \text{axe rotation}$) $P_{\text{pes} \rightarrow 2 / R_0} = 0$ car $\vec{g} \perp \vec{V}_{G_2, 2/0}$ $P_{\text{pes} \rightarrow 3 / R_0}$ $P_{\text{pes} \rightarrow 4 / R_0} = 0$ car masse négligée $P_{0 \rightarrow 1/0} = 0$ (LP) $P_{0 \rightarrow 2/0} = 0$ (LP) $P_{0 \rightarrow 4/0} = 0$ (LP) $P_{\text{air} \rightarrow 3 / R_0}$ $P_{\text{flex-shaft} \rightarrow 1 / R_0}$	$P_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ (LP) $P_{2 \leftrightarrow 3} = 0$ (LP)

Détail des calculs :

- Pesanteur $\rightarrow 3$

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_b \cdot \vec{z}_0 \\ V_{20} \cdot \vec{x}_0 + \frac{L_3}{2} \cdot \omega_b \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{G_3}$$

donc :

$$P_{\text{pes} \rightarrow 3 / R_0} = -M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \omega_b \cdot \cos(\theta_b) = K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \cos(\theta_b) \cdot \omega_f$$

- Flex-shaft $\rightarrow 1$

$$\{\mathcal{T}_{\text{Flex-shaft} \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_f \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_f \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0}$$

donc :

$$P_{\text{flex-shaft} \rightarrow 1 / R_0} = C_f \cdot \omega_f$$

- Air $\rightarrow 3$

$$\{\mathcal{T}_{\text{air} \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{\text{air}} \cdot \vec{y}_3 \\ \frac{L_3}{2} \cdot F_{\text{air}} \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{O_2} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_b \cdot \vec{z}_0 \\ V_{20} \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_2}$$

donc :

$$P_{\text{air} \rightarrow 3 / R_0} = -F_{\text{air}} \cdot V_{20} \cdot \sin(\theta_b) + \frac{L_3}{2} \cdot F_{\text{air}} \cdot \omega_b = \dot{\theta}_f \cdot F_{\text{air}} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right)$$

On applique alors le théorème de l'énergie-puissance :

$$\frac{dT_{(\Sigma/R_0)}}{dt} = P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0} + P_{\text{int}(\Sigma)}$$

Détail des calculs :

- Calcul de $\frac{dT_{(\Sigma/R_0)}}{dt}$.

Comme J_{eq} dépend de θ_b qui dépend du temps, on a :

$$\frac{dT_{(\Sigma/R_0)}}{dt} = J_{eq} \cdot \omega_f \cdot \dot{\omega}_f + \frac{1}{2} \cdot \omega_b \cdot B_{eq} \cdot \sin(\theta_b) \omega_f^2 = \omega_f \cdot \left(J_{eq} \cdot \dot{\omega}_f - \frac{1}{2} \cdot B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_f^2 \right)$$

- Calcul de $P_{ext \rightarrow \Sigma/R_0}$ ($P_{int(\Sigma)} = 0$) :

$$P_{ext \rightarrow \Sigma/R_0} = \omega_f \cdot \left[C_f + K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right) \right]$$

D'après le théorème de l'énergie-puissance, on a donc :

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_f - B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{4 \cdot \pi} \cdot \omega_f^2 = C_f + \frac{K_{cc} \cdot p \cdot M_3 \cdot g \cdot L_3}{4 \cdot \pi} \cdot \cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right)$$

5 Étude de l'asservissement de la chaîne de transmission de puissance permettant l'ouverture des volets de la nacelle

Q 20. Établir les expressions littérales des quatre fonctions de transfert du schéma bloc de la Figure 15 dans les conditions de Heaviside.

En passant les équations modélisant le moteur à courant continu dans le domaine de Laplace, on obtient :

$$U(p) - E(p) = (R + L \cdot p) \cdot I(p) \quad ; \quad C_m(p) = K_m \cdot I(p) \quad ;$$

$$E(p) = K_m \cdot \Omega_m(p) \quad \text{et} \quad \Omega_m(p) = \frac{1}{J_m \cdot p} (C_m(p) - C_r(p))$$

Ainsi on a :

$$H_1(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \quad K_2(p) = K_m \quad H_3(p) = \frac{1}{J_m \cdot p} \quad K_4(p) = K_m$$

Q 21. Déterminer la valeur de K_a afin qu'en régime établi $I(t) = I_c(t)$.

Pour que l'asservissement ait un sens, il faut qu'en régime établi, avec $I(t) = I_c(t)$, l'écart $\varepsilon_U(t)$ soit nul. Or, dans le domaine de Laplace :

$$\varepsilon_U(p) = K_a \cdot I_c(p) - R_e \cdot I(p)$$

Ainsi pour $\varepsilon_U(p) = 0$ et $I(p) = I_c(p)$, on obtient qu'il est nécessaire d'avoir :

$$K_a = R_e$$

Q 22. En bloquant la rotation du moteur et en l'absence de couple résistant ($C_r(t) = 0$), **calculer** la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en courant $\frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$.

Avec $\Omega_m(p) = 0$ et $C_r(p) = 0$, on a :

$$H_{BO}(p) = \frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p) = \frac{R_e}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p} \cdot C(p)$$

Q 23. Non traitée

Q 24. Montrer alors que la fonction de transfert $\frac{I(p)}{I_c(p)}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{R_e \cdot K_p}{R_e \cdot K_p + \tau_i \cdot R \cdot p}$$

En gardant les mêmes hypothèses (rotor bloqué), on a :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = K_a \cdot \frac{H_1(p) \cdot C(p)}{1 + R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p)}$$

Comme $K_a = R_e$ et $\tau_i = \frac{L}{R}$, on a :

$$R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p) = \frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}$$

Ainsi :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{\frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}}{1 + \frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}} = \frac{R_e \cdot K_p}{R_e \cdot K_p + \tau_i \cdot R \cdot p}$$

On trouve bien la forme demandée.

Q 25. En **déduire** l'expression du temps de réponse de la boucle de courant et la valeur de K_p permettant de répondre au cahier des charges ($L = 1 \cdot 10^{-5}$ H et $R_e = 0,01 \Omega$).

La fonction de transfert de la boucle de courant déterminée est une fonction de transfert du 1^{er} ordre de gain unitaire et de constante de temps $\tau_{BC} = \frac{\tau_i \cdot R}{R_e \cdot K_p} = \frac{L}{R_e \cdot K_p}$.

Le temps de réponse à 5% de cette boucle de courant vaut donc :

$$t_{r5\%} = 3 \cdot \frac{L}{R_e \cdot K_p}$$

Pour respecter l'exigence id='1.4.1', il faut que ce temps de réponse soit inférieur à 0,3 ms. Ainsi, il faut :

$$3 \cdot \frac{L}{R_e \cdot K_p} < 3 \cdot 10^{-4}$$

d'où

$$K_p > \frac{10^4 \cdot L}{R_e} \quad \underline{\text{AN}} : K_p > 10$$

On choisit pour la suite $K_p = 10$

Q 26. A partir du graphique, **valider** le modèle théorique précédemment établi et **vérifier** les performances attendues dans le diagramme des exigences.

Sur la figure 17, avec correcteur on observe une allure de la réponse indicielle qui permet d'assimiler la boucle de courant à :

- un 1^{er} ordre (tangente à l'origine non horizontale) ;
- de gain unitaire (valeur finale tendant vers 1) ;
- de constante d'environ 1 ms (temps pour la valeur 0,63 ou temps de croisement entre l'asymptote finale et la tangente à l'origine) ;
- avec un temps de réponse à 5% de 3 ms.

Au bilan, cette réponse expérimentale permet de valider l'étude théorique car le modèle obtenu est le même dans les deux cas. De plus l'exigence id='1.4.1' de précision (erreur statique nulle) et de rapidité (temps de réponse inférieur à 0,3 ms) est vérifiée (même si celle de rapidité est à la limite).

Q 27. Calculer la fonction de transfert $\frac{\Omega_f(p)}{\Omega_m(p)}$ en fonction des paramètres présentés précédemment.

Par lecture directe du schéma-bloc, on a :

$$\Omega_f(p) = \frac{1}{J_r \cdot p} \cdot \frac{k + f \cdot p}{p} \cdot (\Omega_m(p) - \Omega_f(p))$$

$$\Omega_f(p) \cdot \frac{k + f \cdot p + J_r \cdot p^2}{J_r \cdot p^2} = \Omega_m(p) \cdot \frac{k + f \cdot p}{J_r \cdot p^2}$$

$$\frac{\Omega_f(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1 + \frac{f}{k} \cdot p}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2}$$

Q 28. Calculer la limite quand t tend vers l'infini de $\omega_m(t) - \omega_f(t)$ pour une entrée en rampe de $\omega_m(t)$ de pente a_{m0} .

Par application du théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_m(t) - \omega_f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot (\Omega_m(p) - \Omega_f(p))$$

Or avec $\Omega_m(p) = \frac{a_{m0}}{p^2}$ (entrée de type rampe), on a :

$$\Omega_m(p) - \Omega_f(p) = \frac{a_{m0}}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{f}{k} \cdot p}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2} \right) = \frac{a_{m0}}{p^2} \cdot \frac{\frac{J_r}{k} \cdot p^2}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2}$$

d'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_m(t) - \omega_f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{a_{m0} \cdot \frac{J_r}{k}}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2} = 0$$

Q 29. Caractériser le comportement du flex-shaft à temps infini pour l'entrée définie précédemment.

La fonction de transfert modélisant le comportement du flex-shaft présentant un dénominateur du second ordre avec des coefficients de même signe, elle est tout d'abord intrinsèquement stable.

De plus, l'erreur pour une entrée rampe étant nulle, on peut conclure que, pour un temps infini, la vitesse de rotation de sortie du flex-shaft suivra exactement celle de consigne de type rampe.

Q 30. Non traitée

Q 31. Non traitée

Q 32. Non traitée

6 Conclusion

Q 33. Résumer succinctement la validation ou non des critères du diagramme des exigences demandés.

Id	Cahier des charges	Valeur trouvée	Validation
1.1.1	inversion de poussée en moins de 3 s	inversion de poussée en 1,8 s (Question 14)	OUI
1.2.1	$\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$ pour les volets	$\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$ non vérifié, donné par le sujet	OUI selon le sujet
1.2.2	course minimale de 50 cm pour la nacelle	course totale de 54 cm (Question 11)	OUI
1.4.1	$t_{r5\%} < 0,3$ ms et erreur statique nulle pour la boucle de courant	$t_{r5\%} = 0,3$ ms et erreur statique nulle (Question 25 et 26)	OUI (mais pas strictement pour $t_{r5\%}$)