

# 1 exercice 4

## 1.1

$$\frac{\frac{\frac{}{p, \neg p \vdash p} (ax)}{p, \neg p \vdash \perp} (\neg_e)}{p \vdash \neg \neg p} (\neg_i)}{\vdash p \rightarrow \neg \neg p} (\rightarrow_i)$$

## 1.2

$$\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash p \rightarrow q} (ax)}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash q} (\rightarrow_e)}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash \neg q} (\neg_e)}{\frac{\frac{\frac{}{p \rightarrow q, \neg q, p \vdash \perp} (\neg_i)}{p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p} (\neg_i)}{p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p} (\rightarrow_i)}}$$

## 1.3

### 1.3.1

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg(p \vee q), p \vdash p} (ax)}{\neg(p \vee q), p \vdash p \vee q} (\vee_i)}{\neg(p \vee q), p \vdash \perp} (\neg_i)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p} (\neg_i)}{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg(p \vee q), q \vdash q} (ax)}{\neg(p \vee q), q \vdash p \vee q} (\vee_i)}{\neg(p \vee q), q \vdash \perp} (\neg_i)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg q} (\neg_i)}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q} (\wedge_i)}{\vdash \neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q} (\rightarrow_i)}}$$

### 1.3.2

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, p \vdash p} (ax)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, p \vdash \perp} (\neg_e)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, p \vdash \perp} (\neg_e)}{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, p \vdash \neg p \wedge \neg q} (ax)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, p \vdash \neg p} (\wedge_e)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, q \vdash q} (ax)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, q \vdash \perp} (\neg_e)}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q, q \vdash \perp} (\neg_e)}{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg p \wedge \neg q, p \vee q \vdash \perp} (\neg_i)}{\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)} (\neg_i)}{\vdash \neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \vee q)} (\rightarrow_i)}}$$

### 1.3.3

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\overline{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash p \wedge q} (ax)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash p} (\wedge_e)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash \perp} \\
\frac{\frac{\overline{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash \neg p} (ax)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash \perp} (\neg_e)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg p \vdash \perp} \\
\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \neg p \wedge \neg q} (ax)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \neg q} (\wedge_e)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \perp} \\
\frac{\frac{\overline{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \neg q} (ax)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \perp} (\neg_e)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q, \neg q \vdash \perp} \\
\frac{\frac{\frac{\overline{\neg p \vee \neg q, p \wedge q \vdash \perp} (\neg_i)}{\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)} (\rightarrow_i)}{\vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)} (\rightarrow_i)}{\neg p \vee \neg q, p \wedge q \vdash \neg p \vee \neg q} (\vee_e)
\end{array}$$

## 2 Exercice 5

### 2.1

$$\frac{\frac{\frac{\overline{p \vee q, \neg q, q \vdash q} (ax)}{p \vee q, \neg q, q \vdash \perp} (\perp_e)}{p \vee q, \neg q, q \vdash p} (\vee_e)}{p \vee q, \neg q, p \vdash p} (ax) \quad \frac{\frac{\overline{p \vee q, \neg q, q \vdash \neg q} (ax)}{p \vee q, \neg q, q \vdash p} (\neg_e)}{p \vee q, \neg q \vdash p \vee q} (\vee_e)}{p \vee q, \neg q \vdash p \vee q} (\vee_e)$$

### 2.2

Il faut le raisonnement par l'absurde, règle (raa) ou une autre en logique classique.

## 3 Exercice 6

### 3.1

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \neg p} (ax)}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \neg p \vee \neg q} (\vee_i)}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p \vdash \perp} (raa)}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p} (raa)}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q} (\wedge_e)}{\frac{\overline{\text{même chose avec } q} (\wedge_e)}{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash \neg(p \wedge q)} (\neg_e)}{\frac{\overline{\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q) \vdash \perp} (raa)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q} (raa)}$$

### 3.2

$$\frac{\frac{\overline{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash p} (ax)}{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash \perp} (\neg_e)}{\frac{\frac{\overline{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash \perp} (raa)}{\neg q \rightarrow \neg p, p \vdash q} (\rightarrow_i)}{\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q} (\rightarrow_i)}{\frac{\frac{\overline{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash \neg q} (ax)}{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash \neg p} (\neg_e)}{\neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \vdash \neg q} (\rightarrow_e)}$$