DÉDUCTION NATURELLE

La déduction naturelle est un système de preuves permettant d'établir la validité d'une formule propositionnelle, sans avoir à utiliser les tables de vérité.

1. Arbre de preuve

Séquent

Un **séquent** est un couple formé d'un ensemble de formules logiques Γ et d'une formule φ. On le note $\Gamma \vdash \varphi$.
Les formules de Γ sont appelées **hypothèses** et Γ le **contexte**, et φ est appelée la **conclusion**.

Interprétation : $\Gamma \vdash \varphi$ se lit « Γ induit φ » ou « Γ prouve φ » et exprime le fait que sous les hypothèses de Γ, on peut prouver φ. Par exemple, $p, p \rightarrow q \vdash q$ est un séquent (*modus ponens*).

Règle d'inférence

Une **règle d'inférence** est constituée :

- d'un ensemble de séquents appelés **prémisses**
- d'un séquent appelé **conclusion**

Une règle sans prémisse est appelée **axiome**

On représente une règle sous la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Par exemple (voir plus loin) la règle d'élimination de l'implication se représente ainsi :

$$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\rightarrow_e)$$

le nom de la règle figure à droite.

Arbre de preuve

Un **arbre de preuve** ou simplement une **preuve** du séquent $\Gamma \vdash \varphi$, est un arbre dont les feuilles sont vides, les nœuds sont des séquents, les branches des règles d'inférence, et la racine est $\Gamma \vdash \varphi$.
Lorsque Γ est vide, on dit qu'on a une preuve de $\vdash \varphi$ ou encore une **preuve de la formule** φ.

On dit encore qu'un séquent prouvable est **dérivable**.

Traditionnellement, on représente les arbres de preuve avec la racine en bas et les feuille en haut.

2. Règles de la déduction naturelle

La déduction naturelle est un ensemble de règles qui comprend

- une règle axiome ;
- deux règles pour chaque connecteur logique : $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$:
  - ∗ une règle d'*élimination*, dans laquelle le connecteur est dans les prémisses mais plus dans la conclusion
  - ∗ une règle d'*introduction*, dans laquelle le connecteur n'est pas dans les premisses mais apparaît dans la conclusion

2.1. Axiome

Axiome

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ (\text{ax})$$

Explication : on peut déduire une formule à partir d'un ensemble de formules dont elle fait partie.

Remarque : on fait là un abus de notation, car à gauche du séquent doit figurer un ensemble de formules et pas une liste. Par exemple dans cette règle, φ peut déjà faire partie de Γ, et n'est pas la « dernière » formule de Γ.

2.2. Implication

Règles concernant l'implication

- **Élimination** de $\rightarrow$ (*modus ponens*)

$$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\rightarrow_e)$$

- **Introduction** de $\rightarrow$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}\ (\rightarrow_i)$$

Explications :

- Élimination : c'est la règle usuelle du modus ponens : si φ et $\varphi \rightarrow \psi$ se déduisent de Γ, alors ψ se déduit de Γ.
- Introduction : si en ajoutant φ comme hypothèse à Γ on arrive à en déduire ψ, alors l'implication $\varphi \rightarrow \psi$ se déduit de Γ.

Exercice n°1

Prouver les séquents :

- $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ (syllogisme *barbara*)
- $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow p \vdash q \rightarrow r$

2.3. Conjonction

Règles concernant la conjonction

- **Éliminations** de $\wedge$ (gauche ou droite)

$$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge_e)$$

- **Introduction** de $\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}\ (\wedge_i)$$

Explications :

- Éliminations : si peut prouver $\varphi \wedge \psi$ à partir des hypothèses de Γ, alors on peut prouver φ et ψ à partir de Γ

- Introduction : si φ et ψ se déduisent des hypothèses de Γ, alors on prouve la formule $\varphi \wedge \psi$ à partir de Γ.

Exercice n°2

Prouver les séquents :

- $p \wedge q \vdash q \wedge p$
- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
- $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

2.4. Disjonction

Règles concernant la disjonction

- **Élimination** de $\vee$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \theta} \ (\vee_e)$$

- **Introductions** de $\vee$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \ (\vee_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \ (\vee_i)$$

Explications :

- Élimination : on raisonne par disjonction de cas : si on peut montrer θ en supposant φ vrai, ou θ en supposant ψ vrai (en plus des hypothèses de Γ), et si de plus $\varphi \vee \psi$ se déduit de Γ, alors Γ seul prouve θ.
- Introduction : c'est une règle qui « affaiblit » le séquent d'origine : si on peut montrer φ alors on peut montrer $\varphi \vee \psi$.

Exercice n°3

Prouver les séquents :

- $p \vee q \vdash q \vee p$
- $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

2.5. Négation

Règles concernant la négation

- **Élimination** de $\neg$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot} \ (\neg_e)$$

- **Introduction** de $\neg$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash (\neg\varphi)} \ (\neg_i)$$

Explications :

- Élimination : si on peut prouver φ et $\neg\varphi$ à partir de Γ, alors on arrive à une contradiction.
- Introduction : si en ajoutant l'hypothèse φ on arrive à une contradiction, on en déduit $\neg\varphi$.

Exercice n°4

- Prouver la formule $p \to \neg\neg p$.
  Remarque : il n'est pas possible de prouver la formule $\neg\neg p \to p$ sans règle supplémentaire.
- Contraposée : montrer le séquent $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$.
  Remarque : la réciproque $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$ n'est pas prouvable sans règle supplémentaire.
- Lois de De Morgan. Prouver les formules
  $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$
  $\neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q)$
  $\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)$
  Remarque la dernière implication $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$ n'est pas prouvable sans règle supplémentaire.

3. Correction de la déduction naturelle

On a le théorème suivant :

Correction de la déduction naturelle

Si le séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable, alors φ est une conséquence sémantique de Γ. Autrement dit :

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

En particulier : si une formule est prouvable, alors elle est valide (c'est une tautologie).

On dit que la déduction naturelle est **correcte**, ou **consistante**, ou encore **cohérente**.

En revanche, le système de règles précédent n'est pas suffisant pour montrer la réciproque : il existe des formules valides qui ne sont pas prouvables.

4. Compléments (hors programme)

Les règles présentées précédemment constituent la déduction naturelle **minimale**.

On peut compléter avec de nouvelles règles pour démontrer davantage de formules (en gardant toujours la correction)

4.1. Logique intuitionniste

On ajoute comme règle l'élimination du faux, encore appelée *absurdité intuitioniste*.

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_e)$$

Explication : si on peut montrer une contradiction, alors toute formule est prouvable (*ex falso quodlibet*, ou *principe d'explosion*).

Exercice n°5

Montrer en logique intuitionniste les séquents

- $p \vee q, \neg q \vdash p$
- $\neg(p \rightarrow q) \vdash q \rightarrow p$

Certaines formules valides ne sont toujours pas prouvables en logique intuitionniste, comme le tiers-exclu $p \vee \neg p$.

4.2. Logique classique

On ajoute au choix l'une des règles suivantes (elles se déduisent l'une de l'autre) pour obtenir la **logique classique**.

- Le principe du *tiers exclu*
$$\frac{}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)}\ (\text{te})$$
- L'élimination de la double négation
$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\neg\neg_e)$$
- Le raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*)
$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\text{raa})$$

Exercice n°6

Montrer les séquents suivants en logique classique :

- $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$
- $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$

Le résultat suivant établit que la logique classique est encore correcte, mais elle est aussi complète : tout formule valide est prouvable.

Complétude de la logique classique

Pour tout ensemble de formules Γ et toute formule φ, on a :

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad \text{si et seulement si} \qquad \Gamma \models \varphi$$

Règles de la déduction naturelle

Axiome
$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ (\text{ax})$$

Opérateur	Règle d'élimination	Règle d'introduction
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\rightarrow_e)$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}\ (\rightarrow_i)$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge_e) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge_e)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}\ (\wedge_i)$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \theta}\ (\vee_e)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}\ (\vee_i) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}\ (\vee_i)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash (\neg\varphi)}\ (\neg_i)$