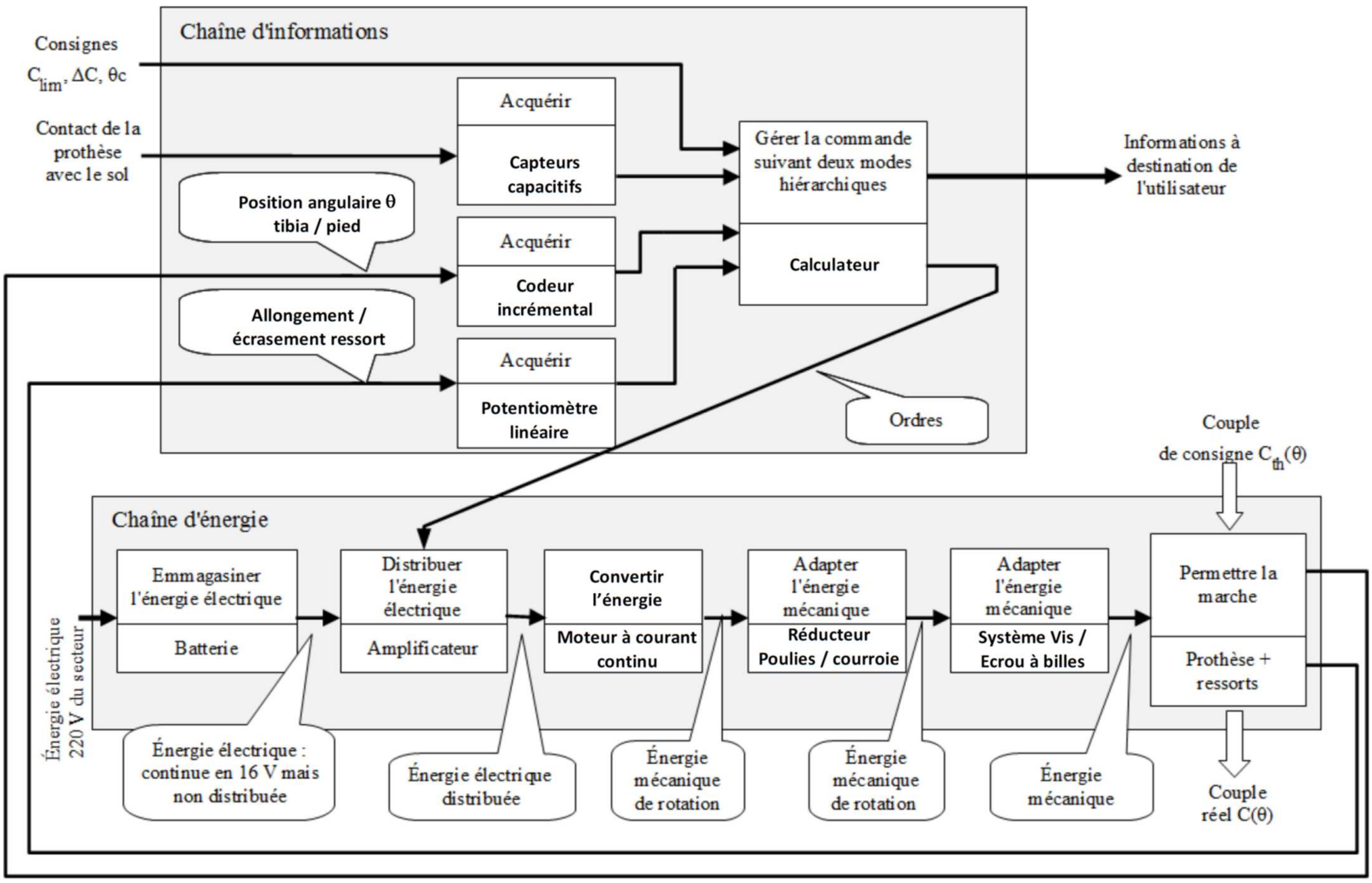
CORRIGÉ: Prothèse active transtibiale

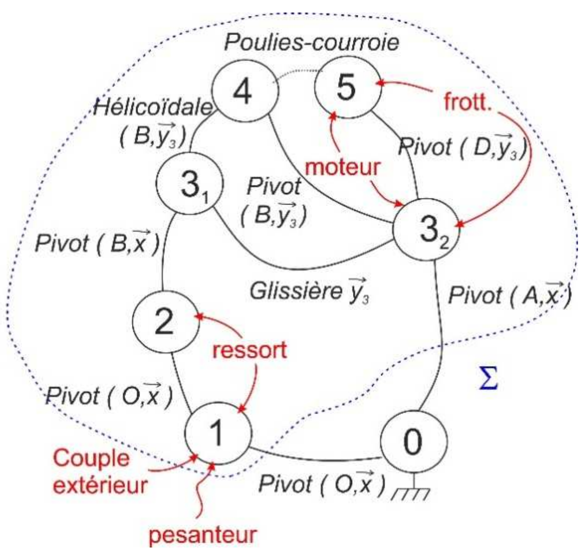
Etude structurelle de la prothèse active

Q1- Chaines d'énergie et d'information.



Comportement dynamique de la prothèse

Q2- Graphe des liaisons

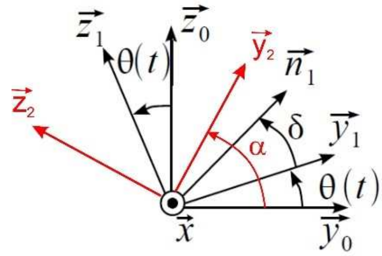


Q3-Bilan des puissances

$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{ext}\to\boldsymbol{\Sigma/0})}$	$\boldsymbol{P}_{(\boldsymbol{Int}\text{ à }\boldsymbol{\Sigma})}$
• $P(pes \to 1/0) = -m_1 g.\dot{\theta}.(z_G\, sin\theta - y_G\, cos\theta)$ • $P(0 \to 3_2/0) = 0\ (LP)$ • $P(0 \to 2/0) = 0\ (LP)$ • $P(0 \to 1/0) = 0\ (LP)$ • $P(ext \to 1/0) = -C\dot{\theta}$	• $P(3_1 \leftrightarrow 3_2) = 0\ (LP)$ • $P(3_1 \leftrightarrow 2) = 0\ (LP)$ • $P(3_1 \leftrightarrow 4) = 0\ (LP)$ • $P(3_2 \leftrightarrow 4) = 0\ (LP)$ • $P(3_2 \leftrightarrow 5) = 0\ (LP)$ • $\mathrm{P}_{(4\leftarrow\text{courroie}\to5)} = 0\ (RSG)$ • $\mathrm{P}_{(\text{stator 5}\leftarrow\text{moteur}\to\text{rotor 32})} = C_m.\,\omega_m$ • $\mathrm{P}_{(\text{stator 32}\leftarrow\text{frott visq}\to\text{rotor 5})} = -\mu_m.\,\omega_m^2$ • $\mathrm{P}_{(1\leftarrow\text{ressort}\to2)} = b.F_{RS}(\dot{\theta}-\dot{\alpha})\,cos(\delta+\theta-\alpha)$

Détail des calculs :

Puissance galiléenne de la pesanteur



$P(pes \to 1/0) = \{T_{(pes\to1)}\}\otimes\{T_{(1/0)}\} = -m_1 g.\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{V_{(G_1,1/0)}}$

Avec $\vec{V}_{(G_1,1/0)} = \overrightarrow{G_1O}\wedge\vec{\Omega}_{(1/0)} = (x_G\,\vec{x} + y_G\,\overrightarrow{y_1} + z_G\,\vec{z}_1)\wedge\dot{\theta}\cdot\vec{x} = \dot{\theta}.(z_G\,\vec{y}_1 - y_G\,\vec{z}_1)$

$P(pes \to 1/0) = -m_1 g.\dot{\theta}.(z_G\,\vec{y}_1\cdot\overrightarrow{z_0} - y_G\,\vec{z}_1\cdot\overrightarrow{z_0}) = \boldsymbol{-m_1 g.\dot{\theta}.(z_G\, sin\theta - y_G\, cos\theta)}$

Puissance galiléenne du couple extérieur

$$P(ext \to 1/0) = \{T_{(ext\to1)}\}\otimes\{T_{(1/0)}\} = \begin{Bmatrix}\vec{0}\\ -C.\vec{x}\end{Bmatrix}_{\forall P}\otimes\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}.\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O = \boldsymbol{-C\dot{\theta}}$$

Puissance des inters efforts générés par le ressort

$\mathrm{P}_{(1\leftarrow\text{ressort}\to2)} = \{T_{(ressort\to2)}\}\otimes\{T_{(2/1)}\} = \{T_{(ressort\to1)}\}\otimes\{T_{(1/2)}\}$, soit au point S : $\mathrm{P}_{(1\leftarrow\text{ressort}\to2)} = \vec{F}_{(ressort\to1)}\cdot\vec{V}_{(S,1/2)}$

Avec $\vec{V}_{(S,1/2)} = \overrightarrow{S0}\wedge\vec{\Omega}_{(1/2)} = (b\cdot\vec{z}_2)\wedge(\dot{\theta}-\dot{\alpha})\cdot\vec{x} = b.(\dot{\theta}-\dot{\alpha}).\vec{y}_2$

$\mathrm{P}_{(1\leftarrow\text{ressort}\to2)} = F_{RS}.\overrightarrow{n_1}\cdot(b.(\dot{\theta}-\dot{\alpha}).\vec{y}_2)$ et $\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{y_2} = cos(\alpha-\delta-\theta)$

D'où : $\mathbf{P}_{(1\leftarrow\text{ressort}\to2)} = \boldsymbol{b.F_{RS}(\dot{\theta}-\dot{\alpha})\,cos(\delta+\theta-\alpha)}$

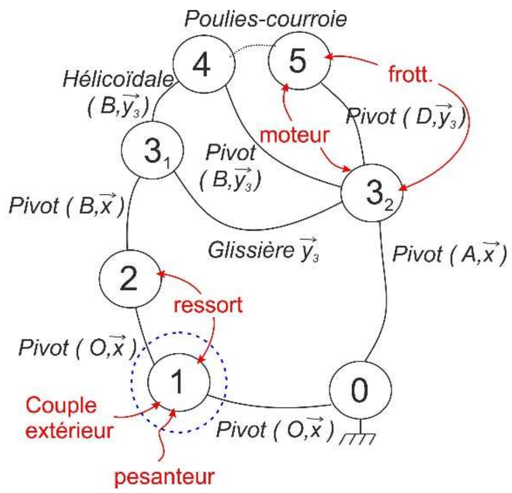
Q4-Ordres de grandeur des puissances galiléennes de la pesanteur sur le pied 1 et du couple extérieur

$P(pes \to 1/0) = -m_1 g.\dot{\theta}.(z_G\, sin\theta - y_G\, cos\theta) \approx 563.10^{-3}\times 9{,}81\times 5{,}2\times 67.10^{-3} = \mathbf{1{,}92}\ \boldsymbol{W}$

$P(ext \to 1/0) = -C\dot{\theta} = 140\times 5{,}2 = \boldsymbol{-728W}$

$$\boxed{\boldsymbol{P(pes \to 1/0) \ll P(ext \to 1/0)}}$$

Q5. Relation entre C et FRS.

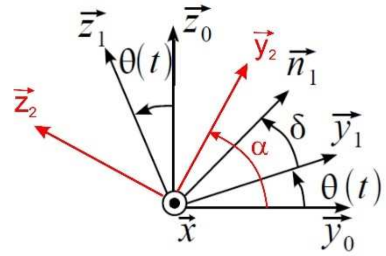


On isole le pied 1, BAME :

- pesanteur négligée
- action du tibia 0 : $\{T_{(0\to1)}\}$ avec $M_{O,(0\to1)}\cdot\vec{x}=0$
- action du basculeur 2 : $\{T_{(0\to2)}\}$ avec $M_{O,(0\to2)}\cdot\vec{x}=0$
- action des ressorts : $\{T_{(ressorts\to1)}\}=\begin{Bmatrix}F_{RS}.\overrightarrow{n_1}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_S$
- couple extérieur : $\{T_{(ext\to1)}\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ -C.\vec{x}\end{Bmatrix}_{\forall P}$

On applique Le théorème du moment dynamique en O au pied 1 en mouvement dans le référentiel tibia 0 supposé galiléen, en projection sur $\vec{x}$:

$$\underbrace{\vec{\delta}_{O,(1/0)}\cdot\vec{x}}_{\substack{=0\\ \text{masse/inertie négligées}}} = \underbrace{\vec{M}_{O,(0\to1)}\cdot\vec{x}}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_{O,(ressorts\to1)}}_{\overrightarrow{OS}\wedge F_{RS}\cdot\vec{n}_1}\cdot\vec{x} - C$$



$$\Big(\underbrace{\overrightarrow{OS}}_{-b.\overrightarrow{z_2}}\wedge F_{RS}\cdot\vec{n}_1\Big)\cdot\vec{x} = -b.F_{RS}.\Big(\underbrace{\vec{x}\wedge\overrightarrow{z_2}}_{-\overrightarrow{y_2}}\Big)\cdot\vec{n}_1 = b.F_{RS}.cos(\alpha-\delta-\theta)$$

D'où : $\boxed{\boldsymbol{C=b.F_{RS}.cos(\delta+\theta-\alpha)}}$

Q6. Position du centre d'inertie - forme simplifiée de la matrice d'inertie

$(O,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est plan de symétrie matérielle du pied artificiel donc :

- Le centre d'inertie G appartient à ce plan
- La matrice d'inertie est de la forme : $I_{(G,1)}=\begin{bmatrix}L_{XX}&0&0\\0&L_{YY}&L_{YZ}\\0&L_{YZ}&L_{ZZ}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Matrice d'inertie numérique : $I_{(G,1)}=\begin{bmatrix}2{,}19\cdot10^{-3}&0&0\\0&4{,}74\cdot10^{-3}&-2{,}76\cdot10^{-3}\\0&-2{,}76\cdot10^{-3}&2{,}22\cdot10^{-3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$

Moment d'inertie du pied suivant $(O,\vec{x})$

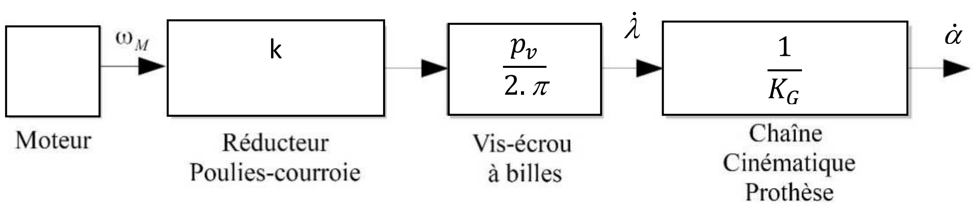
On détermine le moment d'inertie du pied selon l'axe $(O,\vec{x})$ par le théorème de Huygens : $J_P=L_{XX}+M(y_G^2+z_G^2)$.

A.N. : $\boxed{\boldsymbol{J_P=6\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot m^2}}$

Modélisation de la chaîne de transmission

Q7- Expression de λ en fonction de α et de la geometrie. Relation simplifiee au regard du graphe (Illustration 9)

D'après la chaine de transmission :



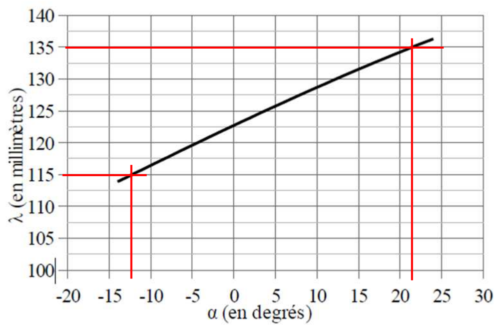
$$\boxed{\boldsymbol{R_T=k.\frac{p_v}{2.\pi}.\frac{1}{K_G}}}\ AN: \boldsymbol{R_T=0{,}0067}$$

Avec K_G obtenu par linéarisation sur la courbe donnée au voisinage de $\alpha=0$

On choisit deux points passant par la courbe : $\begin{cases} 115 = -12{,}5 \times A + B \\ 135 = 22 \times A + B \end{cases}$

On trouve alors A = 0,6 mm/° = 34 mm/rad et B = 122 mm.

On donne alors $\boxed{\boldsymbol{K_G = A = 34\,mm/rad}}$.



Q8. Energie cinétique de l'ensemble Σ

Energie cinétique de l'ensemble Σ en mouvement dans R0 galiléen

$$2.Ec(\Sigma/0) = 2.Ec(rotor\ 5/0) + 2.Ec(pied\ 1/0) + \underbrace{2.Ec(2/0) + 2.Ec(3_2/0) + 2.Ec(3_1/0) + 2.Ec(4/0)}_{inerties\ négligées} = J_M\omega_M^2 + J_p.\dot{\theta}^2$$

Hypothèse : $\dot{\theta} = \dot{\alpha}$

Chaine de transmission : $\omega_M = \frac{\dot{\alpha}}{R_T}$

$$\boldsymbol{2.Ec(\Sigma/0) = J_M\omega_M^2 + J_p.\dot{\theta}^2} = \left(J_M.\frac{1}{R_T^2} + J_P\right)\dot{\alpha}^2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J_{eq} = J_M.\frac{1}{R_T^2} + J_P}}$$

$$AN: J_{eq} = 1{,}34.10^{-5}.\frac{1}{0{,}0067^2} + 6.10^{-3} = 0{,}3 + \underbrace{6.10^{-3}}_{négligeable}\ kg.m^2$$

Q9. Théorème de l'énergie cinétique/énergie-puissance

On isole la prothèse Σ et on applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel tibia supposé galiléen :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}Ec(\Sigma/0) = P(ext \to \Sigma/0) + P(int\ à\ \Sigma)}$$

On en déduit en négligeant maintenant la pesanteur et l'inertie du pied 1:

$$J_M\omega_M\frac{d\omega_M}{dt} = -C\dot{\theta} + C_M\omega_M - \mu_M\omega_M^2 + \underbrace{b.F_{RS}\cos(\delta + \theta - \alpha)}_{= C\ (Q5)}(\dot{\theta} - \dot{\alpha})$$

$$J_M\omega_M\frac{d\omega_M}{dt} = -C\dot{\alpha} + C_M\omega_M - \mu_M\omega_M^2$$

$$J_M\omega_M\frac{d\omega_M}{dt} = -C.R_T\omega_M + C_M\omega_M - \mu_M\omega_M^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{J_M\frac{d\omega_M}{dt} + \mu_M\omega_M = -C.R_T + C_M}}$$

Méthode si les questions ne sont pas détaillées :

Isoler l'ensemble mobile Σ (« tout ce qui bouge »)

① **Enoncer le TEC appliqué à Σ en mouvement par rapport à R0 galiléen :** $\boldsymbol{\frac{dE_C(\Sigma/0)}{dt} = P_{(ext\to\Sigma/0)} + P_{(Int\ à\ \Sigma)}}$

② **Ecrire le Bilan des Puissances galiléennes des AME et des Puissances des AM intérieures à Σ :**

$\boldsymbol{P_{(ext\to\Sigma/0)}}$	$\boldsymbol{P_{(Int\ à\ \Sigma)}}$

③ **Calculer l'énergie cinétique** $\boldsymbol{2.E_C(\Sigma/0) = 2.\sum_i E_C(i/0)}$

- Relations cinématiques (schéma de la chaine de transmission)
- Réécriture de $2.E_C(\Sigma/0)$
- si demandé exprimer la masse équivalente $\boldsymbol{M_{eq}}$ ou l'inertie équivalente $\boldsymbol{J_{eq}}$

④ **Conclure : équation liant du couple moteur C_m aux paramètres cinématiques**