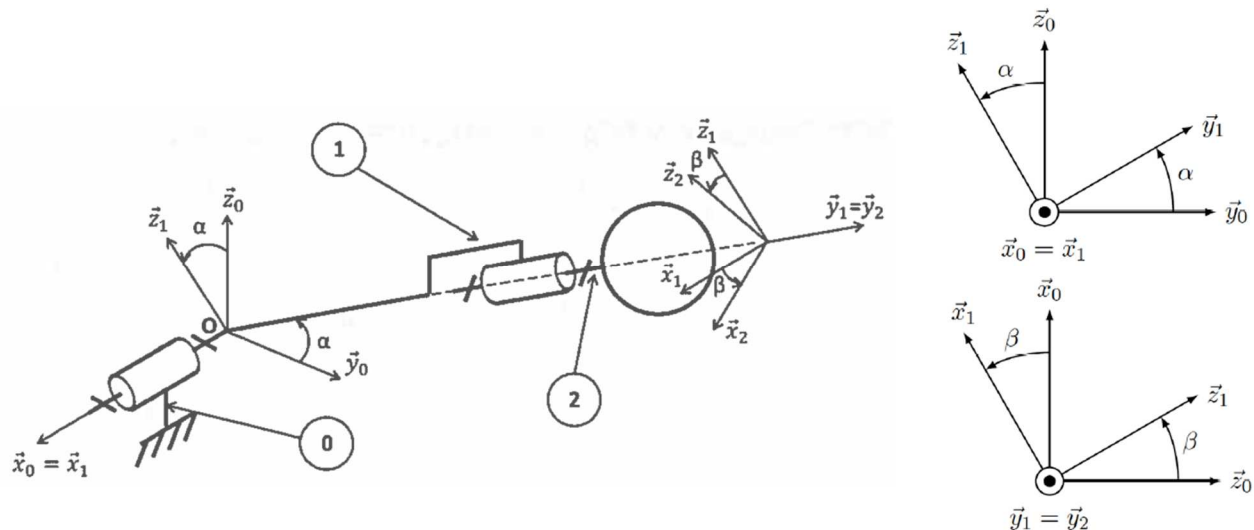


Robot Kuka (d'après ICNA 2017) - CORRIGÉ partie C



- bâti (0) :
 - $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère galiléen associé au bâti (0) ;
 - O est le point d'intersection des axes des deux liaisons pivots L_{01} et L_{12} .

- bras (1) :
 - $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé au bras (1) ;
 - $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \alpha(t)$;
 - de masse m_1 et de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = l_1 \vec{y}_1$;

- de matrice d'inertie $\mathbb{I}(G_1, 1)$ exprimée dans la base \mathcal{B}_1 : $\mathbb{I}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

- nacelle (2) :
 - $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère associé à la nacelle (2) ;
 - $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \beta(t)$;
 - de masse m_2 et de centre de gravité G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = l_2 \vec{y}_1$;

- de matrice d'inertie $\mathbb{I}(G_2, 2)$ exprimée dans la base \mathcal{B}_2 : $\mathbb{I}(G_2, 2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

On note (E) l'ensemble des parties du robot en mouvement : $E = \{1+2\}$. Les liaisons sont toutes supposées parfaites et motorisées. Le bras (1) est supposé accélérer selon l'axe de la liaison pivot entre (0) et (1), tandis que la nacelle (2) tourne à vitesse angulaire constante selon l'axe de la liaison (1) et (2). On suppose donc $\ddot{\alpha} \neq 0$ et $\ddot{\beta} = 0$.

C- Détails du calcul de $\vec{d}_{O, (E/0)}$: cinétique

Q7. Quelle hypothèse a été formulée pour que la matrice d'inertie du bras (1) en son centre de gravité G_1

exprimée dans la base \mathcal{B}_1 s'écrive : $\mathbb{I}(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$?

$D_1 = \int yz \cdot dm = 0$ et $F_1 = \int xy \cdot dm = 0$ donc le bras (1) admet le plan $(G_1, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ comme plan de symétrie matérielle.

Q8. Calculer La matrice d'inertie du bras (1) au point O notée $\mathbb{I}(O, 1)$ dans la base \mathcal{B}_1 .

Th de Huygens : $\mathbb{I}(O, 1) = \mathbb{I}(G_1, 1) + \mathbb{I}(O, \text{masse } m_1 \text{ concentrée en } G_1)$

$$\text{Avec } \overrightarrow{OG_1} = l_1 \cdot \overrightarrow{y_1} : \mathbf{I}(O, \text{masse } m_1 \text{ concentrée en } G_1) = m_1 \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$\mathbf{I}(O, 1) = \begin{bmatrix} A_1 + m_1 \cdot l_1^2 & \mathbf{0} & -E_1 \\ \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} \\ -E_1 & \mathbf{0} & C_1 + m_1 \cdot l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$$

Pour la suite, on considère que la matrice d'inertie du bras (1) en O et dans la base B1 s'écrit :

$$\mathbf{I}(O, 1) = \begin{bmatrix} A'_1 & 0 & -E'_1 \\ 0 & B'_1 & 0 \\ -E'_1 & 0 & C'_1 \end{bmatrix}_{B_1}$$

Q9. Exprimer le moment cinétique du bras (1) dans son mouvement par rapport à (0) au point O dans la base B1, noté $\vec{\sigma}_{O,(1/0)}$.

$$\vec{\sigma}_{O,(1/0)} = \mathbf{I}(O, 1) \cdot \overrightarrow{\Omega(1/0)} \text{ car } \overrightarrow{V(O, 1/0)} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_{01}} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_{O,(1/0)} = A'_1 \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_{01}} - E'_1 \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}}$$

On considère que la matrice d'inertie de la nacelle (2) en G_2 dans la base B1 s'écrit :

$$\mathbf{I}(G_2, 2) = \begin{bmatrix} A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta & 0 & (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \\ 0 & B_2 & 0 \\ (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta & 0 & A_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta \end{bmatrix}_{B_1}$$

Q10. Exprimer le moment cinétique de (2) dans son mouvement par rapport à (0) au point O dans la base B1 noté $\vec{\sigma}_{O,(2/0)}$.

$$\vec{\sigma}_{O,(2/0)} = \vec{\sigma}_{G_2,(2/0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{V_{G_2,2/0}}$$

$$\text{Avec } \vec{\sigma}_{G_2,(2/0)} = \mathbf{I}(G_2, 2) \cdot \overrightarrow{\Omega(2/0)}$$

$$= \begin{bmatrix} A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta & 0 & (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \\ 0 & B_2 & 0 \\ (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta & 0 & A_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta \end{bmatrix}_{B_1} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta) \cdot \dot{\alpha} \\ B_2 \cdot \dot{\beta} \\ [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta] \cdot \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt} \right|_{R_0} = l_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = m_2 l_2 \overrightarrow{y_1} \wedge l_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} = m_2 \cdot l_2^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{O,(2/0)} = (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y_1} + [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta] \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}}$$

Q11. En déduire le torseur cinétique de l'ensemble (E) par rapport à (0) au point O noté $\{C_{(E/0)}\}$.

$$(E) = \{1+2\} : \vec{R}_{(E/0)} = \vec{R}_{(1/0)} + \vec{R}_{(2/0)} \text{ et } \vec{\sigma}_{O,(E/0)} = \vec{\sigma}_{O,(1/0)} + \vec{\sigma}_{O,(2/0)}$$

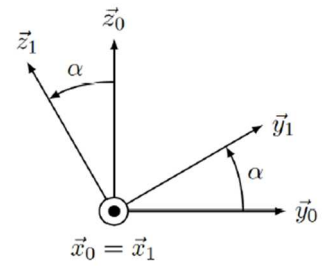
$$\vec{R}_{(E/0)} = m_1 \cdot \overrightarrow{V_{G_1,1/0}} + m_2 \cdot \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\sigma}_{O,(E/0)} = A'_1 \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_{01}} - E'_1 \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} + (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y_1} + [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta] \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\boxed{\{C_{(E/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ (A'_1 + A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_{01}} + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{y_1} + [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta - E'_1] \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_O}$$

Q12. Calculer le moment dynamique en O de (E) dans son mouvement par rapport à (0) : $\vec{\delta}_O, (E/0)$, en déduire les expressions de $\mu_0, \mu_1, \rho_0, \eta_0, \eta_1$ en fonction des moments et produits d'inertie des solide 1 et 2 et de l'angle β .

$$\vec{\delta}_O, (E/0) = \frac{d\vec{\sigma}_{O,(E/0)}}{dt} \Big|_{R0} \text{ car } \vec{V}_{O/R0} = \vec{0} \text{ avec } \frac{dy_1}{dt} \Big|_{R0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \text{ et } \frac{dz_1}{dt} \Big|_{R0} = -\dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$



$$\begin{aligned} \vec{\delta}_O, (E/0) \cdot \vec{x}_{01} &= (A_1 + A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \ddot{\alpha} + (-2A_2 \cdot \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + 2 \cdot C_2 \cdot \dot{\beta} \cos \beta \sin \beta) \cdot \dot{\alpha} \\ \vec{\delta}_O, (E/0) \cdot \vec{y}_1 &= B_2 \cdot \ddot{\beta} - [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta - E'_1] \cdot \dot{\alpha}^2 \\ \vec{\delta}_O, (E/0) \cdot \vec{z}_1 &= [(C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta - E'_1] \cdot \ddot{\alpha} + (C_2 - A_2) \cdot [\cos^2 \beta - \sin^2 \beta] \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha} + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha} \end{aligned}$$