

Statique des Systèmes Mécaniques

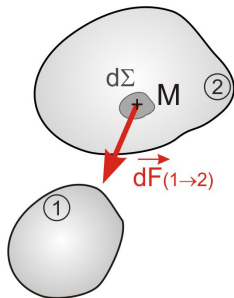
Spé MP-MP* 2026-2027

Lycée Thiers Marseille

1 - Modélisation d'une action mécanique

Localement en M :

$$\{d\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{dF}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$



Modèle local au point O quelconque

$$\{d\tau_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{dF}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{OM} \wedge \vec{dF}(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_O$$

Avec $\vec{dF}(1 \rightarrow 2) = \vec{f}_M(1 \rightarrow 2)d\Sigma$

- $\vec{f}_M(1 \rightarrow 2)$ densité surfacique (N/m²) ou volumique (N/m³) d'effort au voisinage de M ,
- $d\Sigma$ élément surfacique ou volumique.

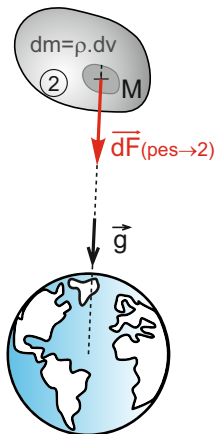
Modèle global au point O quelconque

$$\{\tau_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = \int_{M \in \Sigma} \vec{dF}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_{O(1 \rightarrow 2)} = \int_{M \in \Sigma} \vec{OM} \wedge \vec{dF}(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_O$$

1.1 Actions à distance : Cas de la pesanteur

Chaque élément dv de masse élémentaire dm est soumis à :

$$\vec{dF}(\text{pes} \rightarrow 2) = \vec{g}.dm = \vec{g}.\rho.dv$$



Torseur d'action mécanique de la pesanteur en G :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(\text{pes} \rightarrow 2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_2 = m_2 \cdot \vec{g} \\ \vec{M}_{G,(\vec{P}_2)} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

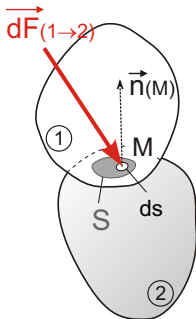
Centre d'inertie

$$\int_{M \in 2} \vec{GM}.dm = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{OG} = \frac{1}{m_2} \int_{M \in 2} \vec{OM}.dm$$

1.2 Actions de contact

Chaque élément ds de la surface de contact S est soumis à :

$$\vec{dF}(1 \rightarrow 2) = \vec{f}_M(1 \rightarrow 2).ds$$



Torseur d'action mécanique surfacique de contact en O :

$$\left\{ \mathcal{T}(1 \rightarrow 2) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = \int_{M \in S} \vec{f}_M(1 \rightarrow 2).ds \\ \vec{M}_{O(1 \rightarrow 2)} = \int_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{f}_M(1 \rightarrow 2).ds \end{array} \right\}_O$$

Dans le cas d'un contact sans frottement :

$$\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = -p(M). \vec{n}(M)$$

- $p(M)$: pression de contact en M (N/m^2),
- $\vec{n}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, **orienté vers l'extérieur**.

2.1 Liaisons parfaites (sans frottement)

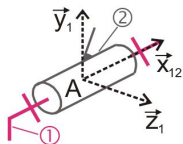
Liaisons mécaniques parfaites au sens énergétique :

Les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématique d'une liaison entre S_1 et S_2 **PARFAITE** (sans frottement) sont duaux, la puissance des actions mutuelles entre les 2 solides est nulle :

$$\mathcal{P}_{(1 \leftrightarrow 2)} = \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \right\} = \vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{M}_{A,(1 \rightarrow 2)} + \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{V}_{(A,2/1)} = 0$$

2.2 Torseurs des actions mécaniques transmissibles

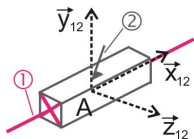
Liaisons parfaites (sans frottement)



Pivot d'axe ($A, \vec{x}_{12}$)

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})} \quad \text{avec } \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

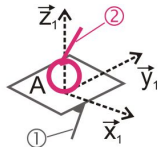
5 inconnues statiques



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M} \quad \text{avec } \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

5 inconnues statiques



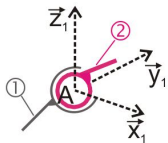
Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{z}_1$ de contact A

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = Z_{12} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{z}_1)}$$

1 inconnue statique

2.2 Torseurs des actions mécaniques transmissibles

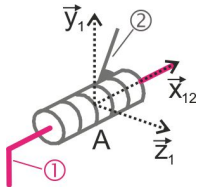
Liaisons parfaites (sans frottement)



Sphérique (rotule) de centre A

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

3 inconnues statiques

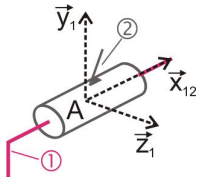


Hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x}_{12})$ (hélice à droite, pas p)

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})} \quad \text{avec } L_{12} = -\frac{p}{2\pi} \cdot X_{12}$$

$$X_{12} = \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}, \quad L_{12} = \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}$$

5 inconnues statiques



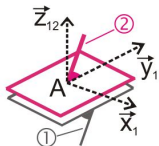
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x}_{12})$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0 \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0 \end{array} \right.$$

4 inconnues statiques

2.2 Torseurs des actions mécaniques transmissibles

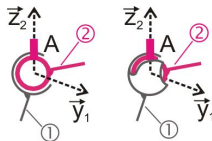
Liaisons parfaites (sans frottement)



Appui plan de normale $\vec{z}_{12}$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = Z_{12} \cdot \vec{z}_{12} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_{\forall M}, \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z}_{12} = 0$$

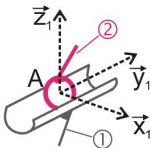
3 inconnues statiques



Sphérique à doigt de centre A d'axe $(A, \vec{z}_2)$, de normale $\vec{y}_1$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{A, (1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_A \text{ avec } \left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{A, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \vec{M}_{A, (1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z}_2 = 0 \end{array} \right.$$

4 inconnues statiques



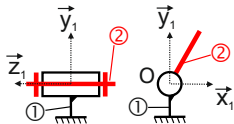
Sphère cylindre de centre A et de direction $\vec{y}_1$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ 0 \end{array} \right\}_A \text{ avec } \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{y}_1 = 0$$

2 inconnues statiques

3 - Liaisons planes

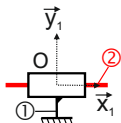
Plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$



Pivot d'axe $(O, \vec{z}_{12})$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ 0 \end{array} \right\}_O$$

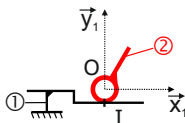
2 inconnues statiques



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = Y_{12} \cdot \vec{y}_{12} \\ \vec{M}_{M, (1 \rightarrow 2)} = N_{12} \cdot \vec{z}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)}$$

2 inconnues statiques



Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{y}_1$ de contact I

$$\{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = Y_{12} \cdot \vec{y}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_{\forall M \in (I, \vec{y}_1)}$$

1 inconnue statique

Enoncé du PFS

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** le torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(Ext \text{ à } E \rightarrow E)} \right\} = \{0\}$$

Remarque : Le PFS s'applique aussi dans les cas suivants :

- le système matériel E est sans accélération par rapport à un référentiel galiléen,
- le système matériel E est sans masse ou de masse négligeable.

4.2 Théorèmes généraux

Théorème des actions réciproques

Si un système matériel S_1 exerce une action mécanique sur une autre système S_2 , alors S_2 exerce l'action opposée sur S_1 :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(S_2 \rightarrow S_1)} \right\} = - \left\{ \mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}$$

Théorème de la Résultante Statique (TRS)

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nulle :

$$\overrightarrow{R}(\text{Ext } a E \rightarrow E) = \vec{0}$$

Théorème du Moment Statique au point O (TMS en O)

Si un système matériel E est à l'équilibre dans un référentiel galiléen, **alors** le moment du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nul :

$$\overrightarrow{M}_O(\text{Ext } a E \rightarrow E) = \vec{0} \quad \forall O$$

4.3 Cas des solides soumis à 2 glisseurs et 3 glisseurs

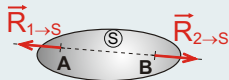
Hypothèses problème plan

- problème **cinématiquement plan** : vitesses dans le plan, vitesses de rotation normales au plan,
- **symétrie du chargement** et symétrie géométrique si prise en compte de la pesanteur.

L'application du PFS donnera 3 équations scalaires (2 de résultante et 1 de moment).

Solide S soumis à 2 glisseurs

Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de **2 glisseurs** dans un référentiel galiléen, alors :



- leurs axes centraux sont confondus,
- les deux résultantes de même norme et de sens opposé.

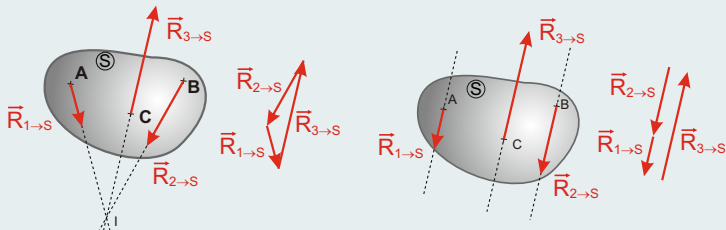
$$\vec{R}_{(1 \rightarrow S)} = -\vec{R}_{(2 \rightarrow S)} \text{ et } \vec{R}_{(1 \rightarrow S)} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$$

4.3 Cas des solides soumis à 2 glisseurs et 3 glisseurs

Solide S soumis à 3 glisseurs

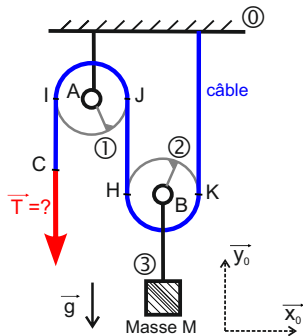
Si un solide (ou ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de **3 glisseurs** dans un référentiel galiléen, alors :

- leurs axes centraux sont concourants ou parallèles,
- les résultantes sont coplanaires, de somme vectorielle nulle.



- **Dessiner** le graphe des liaisons en faisant **apparaître** les actions extérieures, **dénombrer** les inconnues d'action mécanique,
- **Définir** une stratégie d'isolements permettant de résoudre (**commencer** par les solides soumis à 2 glisseurs), puis **suivre** le "cheminement" de l'effort,
- **Mettre** en oeuvre votre démarche :
 - ▶ **préciser** le système isolé S_i ,
 - ▶ **effectuer** le BAME appliqué à S_i ,
 - ▶ **énoncer** les hypothèses,
 - ▶ **écrire** la (ou les) équation(s) utile(s) du PFS appliqué à S_i ,
- **Résoudre** et **calculer** la (les) inconnue(s) recherchée(s).

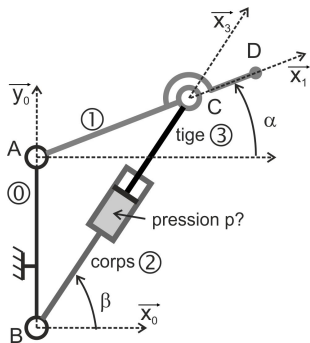
Exercice 1



Déterminer la tension T à appliquer sur le câble, en fonction de la charge M , afin de maintenir le système à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen.
Rayon des poulies R .

$$\{\mathcal{T}_{(pes \rightarrow 3)}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_3}$$

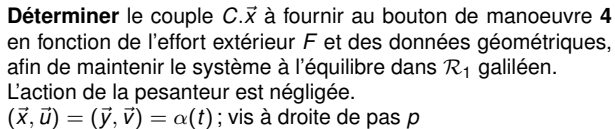
Exercice 2



Déterminer la pression p dans le vérin (de section S) en fonction de l'effort F exercé en D sur **1** et des données géométriques, afin de maintenir le système à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen.

$$\vec{BA} = h.\vec{y}_0; \quad \vec{AC} = \ell.\vec{x}_1; \quad \vec{AD} = L.\vec{x}_1;$$

$$\{\mathcal{T}_{(ext \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} -F.\vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_D$$



Statique des Systèmes Mécaniques 17 / 18

7 - Annexe - Cas de la liaison hélicoïdale

La puissance des actions mutuelles entre les 2 solides dans une liaison parfaite est nulle :

$$\mathcal{P}_{(1 \leftrightarrow 2)} = \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{T}_{(1 \rightarrow 2)} \right\} = \vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{M}_{A,(1 \rightarrow 2)} + \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{V}_{(A,2/1)} = 0$$

Soit pour une liaison hélicoïdale :

$$\mathcal{P}_{(1 \leftrightarrow 2)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = \frac{p}{2\pi} \cdot \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \end{array} \right\}_M \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \\ \vec{M}_{M,(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_M = 0 \quad \forall M \in (A, \vec{x}_{12})$$

D'où :

$$\omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \cdot \vec{M}_{M,(1 \rightarrow 2)} + \frac{p}{2\pi} \cdot \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \cdot \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = 0$$

Soit :

$$\vec{M}_{M,(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} + \frac{p}{2\pi} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = 0$$

$$\vec{M}_{M,(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12} = -\frac{p}{2\pi} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \cdot \vec{x}_{12}$$

Pour une hélice à droite, on aura bien

$$V_{21} = +\frac{p}{2\pi} \cdot \omega_{21}$$

et

$$L_{12} = -\frac{p}{2\pi} \cdot X_{12}$$