

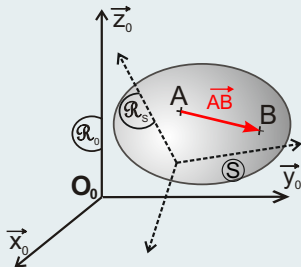
Cinématique des Systèmes Mécaniques

Spé MP-MP* 2026-2027

Lycée Thiers Marseille

1 - Vitesse d'un point mobile et hypothèses

Solide indeformable



Solide (S) **indéformable** si :

$$\forall A, B \in (S), \forall t, \|\vec{AB}\| = cte$$

Formule de Boor

Formule de dérivation dans une base mobile :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_S + \vec{\Omega}(S/0) \wedge \vec{U}$$

Vitesse du point A par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\vec{V}(A/0) = \left. \frac{d\vec{O_0A}}{dt} \right|_0$$

Remarques :

- Le point O_0 est fixe dans $\mathcal{R}_0$.
- Si A appartient matériellement à S ou lié rigidement à S alors $\vec{V}(A, S/0) = \vec{V}(A/0)$

Formule de Varignon $\forall A, B \in (S)$

$$\vec{V}(B, S/0) = \vec{V}(A, S/0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/0)$$

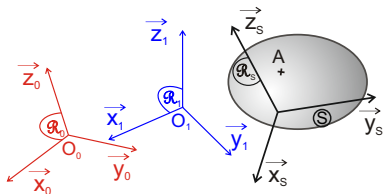
Equiprojectivité des vitesses de $S/0 \forall A, B \in (S)$

$$\vec{V}(B, S/0) \cdot \vec{AB} = \vec{V}(A, S/0) \cdot \vec{AB}$$

Torseur cinématique de $S/0$

$$\{\mathcal{V}_{(S/0)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/0) \\ \vec{V}(A, S/0) \end{array} \right\}_A$$

3 - Composition des mouvements



Composition des vecteurs rotation

$$\vec{\Omega}(S/0) = \vec{\Omega}(S/1) + \vec{\Omega}(1/0)$$

Composition des vecteurs vitesse

$$\underbrace{\vec{V}(A, S/0)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{V}(A, S/1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{V}(A, 1/0)}_{\text{d'entraînement}}$$

$$\vec{V}_{(A,S/0)} = \vec{V}_{(A/0)} = \left. \frac{d\vec{O_0A}}{dt} \right|_0 ; \vec{V}_{(A,S/1)} = \vec{V}_{(A/1)} = \left. \frac{d\vec{O_1A}}{dt} \right|_1 ; \vec{V}_{(A,1/0)} = \vec{V}_{(O_1,1/0)} + \vec{AO_1} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$$

Composition des torseurs cinématiques

$$\{\mathcal{V}(S/0)\} = \{\mathcal{V}(S/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} \quad \text{Ecrits au même point !}$$

4 - Champ des vecteurs accélération

Accélération du point A par rapport à $\mathcal{R}_0$

$$\vec{a}(A/0) = \left. \frac{d\vec{V}(A/0)}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d^2 \vec{O_0A}}{dt^2} \right|_0$$

Si A appartient matériellement à S ou lié rigidement à S alors $\vec{a}(A, S/0) = \vec{a}(A/0)$.

Champ des vecteurs accélération $\forall A, B \in (S)$

$$\vec{a}(B, S/0) = \vec{a}(A, S/0) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(S/0)}{dt} \right|_0 \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(S/0) \wedge (\vec{\Omega}(S/0) \wedge \vec{AB})$$

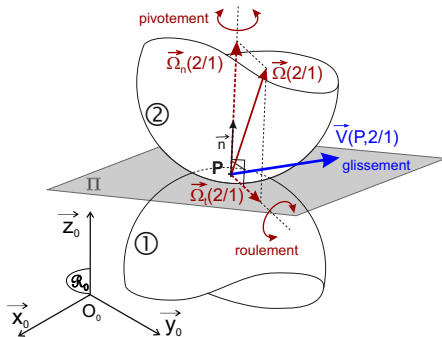
Remarques :

- Se démontre en appliquant la formule de dérivation vectorielle à la relation entre $\vec{V}_{(B,S/0)}$ et $\vec{V}_{(A,S/0)}$,
- $\triangle$ Le champ des vecteurs accélération n'est pas un champ de moments : $\vec{a}_{(B,S/0)} \cdot \vec{AB} \neq \vec{a}_{(A,S/0)} \cdot \vec{AB}$.

Composition des vecteurs accélération

$$\underbrace{\vec{a}(A, S/0)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{a}(A, S/1)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{a}(A, 1/0)}_{\text{d'entraînement}} + \underbrace{2 \cdot \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{V}(A, S/1)}_{\text{de Coriolis}}$$

5 - Contact ponctuel



$$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \vec{\Omega}_n(2/1) + \vec{\Omega}_t(2/1) \\ \vec{V}(P, 2/1) \end{array} \right\}_P$$

(Π) : plan tangent commun à (S_1) et (S_2) en P.

Vecteur vitesse de glissement

Condition de maintien du contact :

$$\vec{V}(P, 2/1) \in (\Pi) \Rightarrow \vec{V}(P, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$$

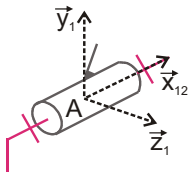
Par composition :

$$\vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(P, 2/0) - \vec{V}(P, 1/0)$$

Condition de roulement sans glissement

$$\vec{V}(P, 2/1) = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

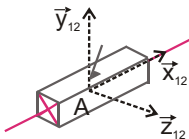
6 - Torseurs cinématiques



Pivot d'axe $(A, \vec{x}_{12})$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})}$$

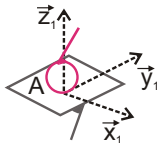
1 degré de liberté en rotation



Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = v_{21} \cdot \vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M}$$

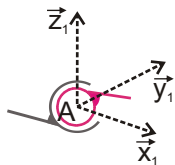
1 degré de liberté en translation



Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{z}_1$ de contact A

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{z}_1)} \quad \text{avec } \vec{V}_{(M,2/1)} \cdot \vec{z}_1 = 0$$

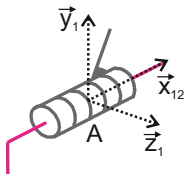
3 degrés de liberté en rotation, 2 degrés de liberté en translation



Sphérique (rotule) de centre A

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ 0 \end{array} \right\}_A$$

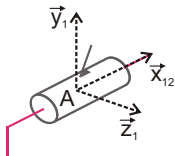
3 degrés de liberté en rotation



Hélicoïdale d'axe (A, $\vec{x}_{12}$) (hélice à droite, pas p)

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = \frac{p}{2\pi} \cdot \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})}$$

1 degré de liberté : rotation et translation liées

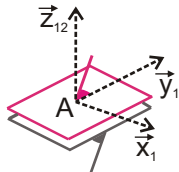


Pivot glissant d'axe (A, $\vec{x}_{12}$)

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{x}_{12} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = v_{21} \cdot \vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (A, \vec{x}_{12})}$$

1 degré de liberté en rotation, 1 degré de liberté en translation

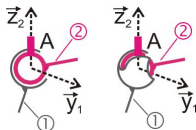
6 - Torseurs cinématiques



Appui plan de normale $\vec{z}_{12}$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_{12} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} \end{array} \right\}_{\forall M}, \vec{V}_{(M,2/1)} \cdot \vec{z}_{12} = 0$$

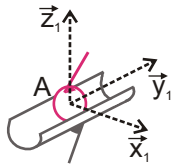
1 degré de liberté en rotation, 2 degrés de liberté en translation



Sphérique à doigt de centre A d'axe $(A, \vec{z}_2)$, de normale $\vec{y}_1$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ 0 \end{array} \right\}_A \text{ avec } \vec{\Omega}_{(2/1)} \cdot \vec{x}_1 = 0$$

2 degrés de liberté en rotation



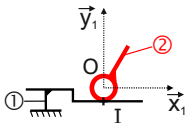
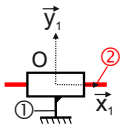
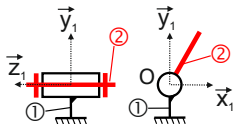
Sphère cylindre de centre A et de direction $\vec{y}_1$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} \\ \vec{V}_{(A,2/1)} = v_{21} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_A$$

3 degrés de liberté en rotation, 1 degré de liberté en translation

7 - Liaisons planes

Plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$



Pivot d'axe $(O, \vec{z}_{12})$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_{12} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

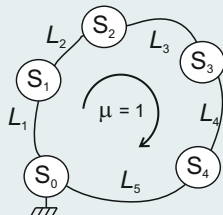
Glissière de direction $\vec{x}_{12}$

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = v_{21} \cdot \vec{x}_{12} \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)}$$

Sphère plan (ponctuelle) de normale $\vec{y}_1$ de contact I

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(2/1)} = \omega_{21} \cdot \vec{z}_{12} \\ \vec{V}_{(M,2/1)} = v_{21} \cdot \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{\forall M \in (O, \vec{y}_1)}$$

Chaîne fermée



Indice de mobilité :

• 3D : $I_m = \sum I_c - 6\mu$

• 2D : $I_m = \sum I_c - 3\mu$

Mobilité (cinématique) :

$$m = m_u + m_i$$

But : Déterminer une loi E/S géométrique ou cinématique,
Entrée = actionneur, paramètre pilote, Sortie = effecteur, paramètre utile.

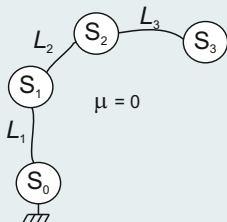
En pratique :

- **2D :** Ecrire une fermeture géométrique (vectorielle-angulaire), puis dériver si nécessaire,
- **3D :** Ecrire une fermeture cinématique (torseurs)

Remarques :

- I_m peut être interprété comme le nombre de relations existantes entre les paramètres cinématiques,
- m peut être interprété comme le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour bloquer le mécanisme,
- $m = I_m$ si le système est isostatique ($h = 0$).

Chaîne ouverte



Mobilité (cinématique) :

$$m = \sum l_c$$

But : Déterminer la position, la vitesse, l'accélération d'un point du dernier solide par rapport au solide de référence (bâti).

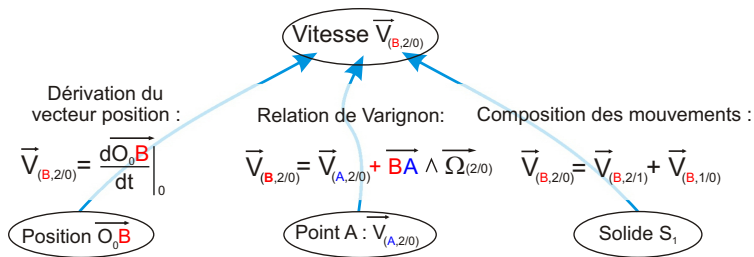
En pratique : Dériver directement le vecteur position peut s'avérer plus rapide.



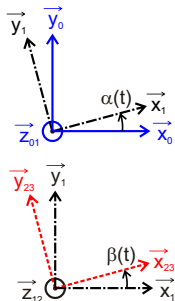
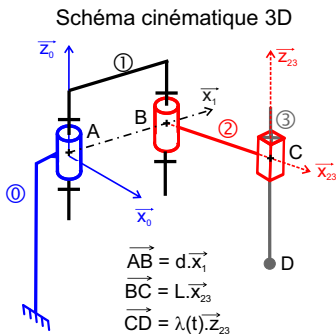
Connaitre parfaitement tous les torseurs de liaisons.



Ne JAMAIS projeter (sauf si c'est demandé).



Exercice 1



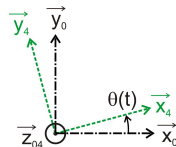
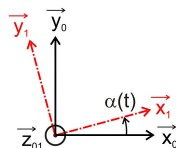
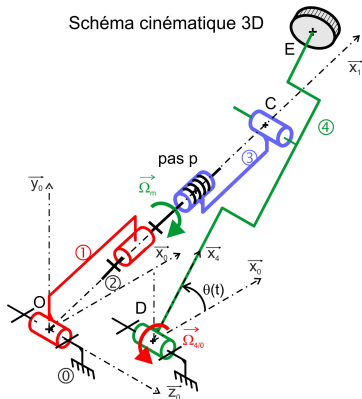
Déterminer la vitesse et l'accélération du point D dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\vec{V}(D, 3/0) = fct(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\lambda}); \quad \vec{a}(D, 3/0) = fct(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\beta}, \ddot{\lambda}).$$

Exercice 2



$$\begin{aligned}\vec{OD} &= d.\vec{x}_0 - h.\vec{y}_0 \\ \vec{DC} &= L.\vec{x}_4 \\ \vec{OC} &= \lambda(t).\vec{x}_1 \\ \vec{\Omega}_m &= \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_m.\vec{x}_1 \\ \vec{\Omega}_{4/0} &= \omega_{4/0}.\vec{z}_0\end{aligned}$$



Déterminer la vitesse de rotation du bras $\omega_{4/0}$ en fonction de ω_m et θ .