

# DS1 MP – MP\* LYCÉE THIERS 2025-2026

- Il vous est demandé de répondre uniquement sur le document réponses à l'intérieur des cadres proposés. De plus, tout résultat doit être souligné ou encadré.
- Vous pourrez formuler toute hypothèse qui vous semblera nécessaire pour pouvoir répondre aux questions posées.
- Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Durée : 3 heures - Calculatrice autorisée.



## Voile solaire de la Seine Musicale

### I Introduction

La Seine Musicale est un équipement à vocation musicale à fort rayonnement culturel, dont l'objet est de créer ou d'aménager des espaces pour des concerts, des expositions, des installations permanentes ou provisoires. Conçue par les architectes Shigeru Ban et Jean de Gastines, la Seine Musicale est implantée en pointe aval de l'Ile Seguin à Boulogne-Billancourt, en région parisienne.

L'auditorium, bâtiment principal du projet de la Seine Musicale, est « posé sur la Seine » et sa coque en bois semble flotter sur le fleuve, tel un bateau doté d'une voile qui circule autour de l'auditorium en suivant le soleil. L'un des défis architecturaux de ce projet consiste à mettre en mouvement la voile (figure 1), équipée de 470 panneaux photovoltaïques, autour de l'auditorium, tout en garantissant une acoustique exceptionnelle.

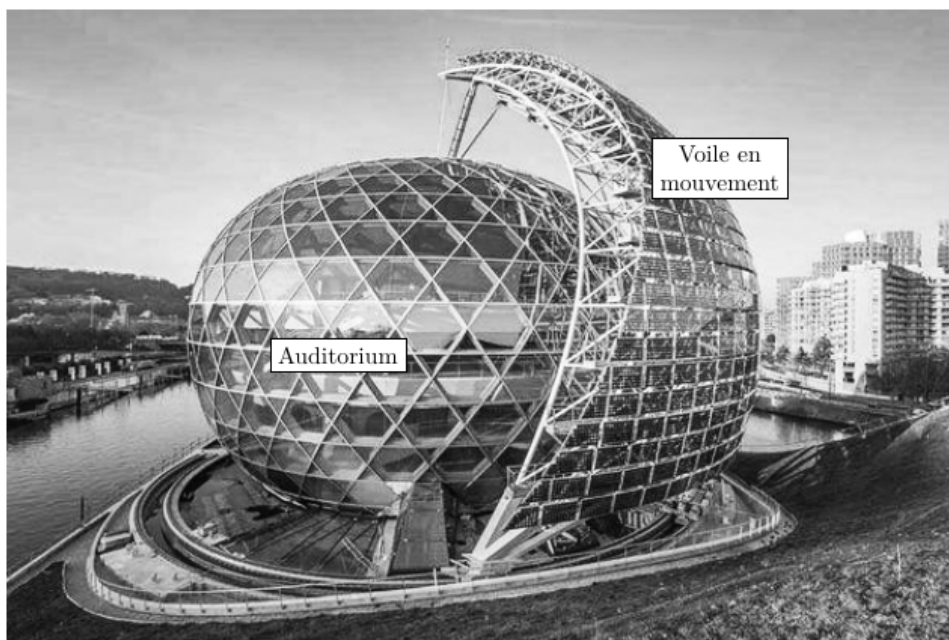


FIGURE 1 – Vue de l'auditorium et de la voile

Afin d'améliorer l'efficacité des panneaux photovoltaïques, le déplacement de la voile s'effectue en suivant l'évolution du soleil au cours d'une journée. La position du soleil (point C) par rapport à un point d'observation sur la terre (point A) est définie par deux paramètres (figure 2) :

- l'élévation  $\theta_z$ , angle entre la direction d'observation du soleil (droite (AC)) et l'horizon (droite (AB)) en degrés;
- l'azimut  $\varphi_a$ , angle entre la direction (AB) et la droite Nord-Sud (Nord :  $\varphi_a = 0^\circ$ ).

Le déplacement de la voile autour du bâtiment s'effectue périodiquement, toutes les 15 minutes, afin d'éviter que les motorisations soient sollicitées en permanence à des vitesses trop faibles. Les caractéristiques globales que la voile doit respecter lors de ses déplacements sont définies dans l'extrait de cahier des charges fonctionnel présenté tableau 1.

Dans un premier temps, on souhaite s'assurer que le déplacement de la voile respecte les exigences du tableau 1. Il est nécessaire pour cela de déterminer le déplacement maximal du soleil durant une période de 15 minutes. Dans ce but, les évolutions de l'azimut du soleil  $\varphi_a$  au cours de la journée sont données en figure 3 pour le solstice d'été.

**Question 1 :** À partir de la figure 3, déterminer la vitesse azimutale maximale du soleil en degrés par seconde, notée  $\Omega_{a \max}$ . En déduire le déplacement maximal du soleil pendant un intervalle de 15 min, noté  $\varphi_{a \max}$  en degrés.

| Id  | Exigence                                                          | Critère                | Niveau              |
|-----|-------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------|
| 1   | La voile doit se déplacer pour suivre le soleil                   | Période                | Toutes les 15 min   |
| 1.1 | Le déplacement de la voile doit être imperceptible à l'œil humain | Vitesse de déplacement | $\leq 0,18^\circ/s$ |
| 1.2 | Le déplacement de la voile doit être suffisamment rapide          | Temps de déplacement   | $\leq 1min$         |

TABEAU 1 – Extrait du cahier des charges

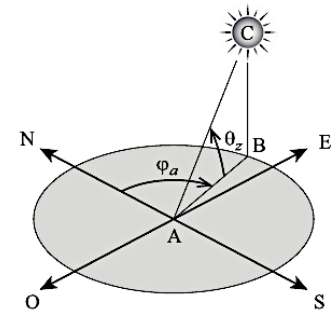


FIGURE 2 – Paramétrage azimut/élévation

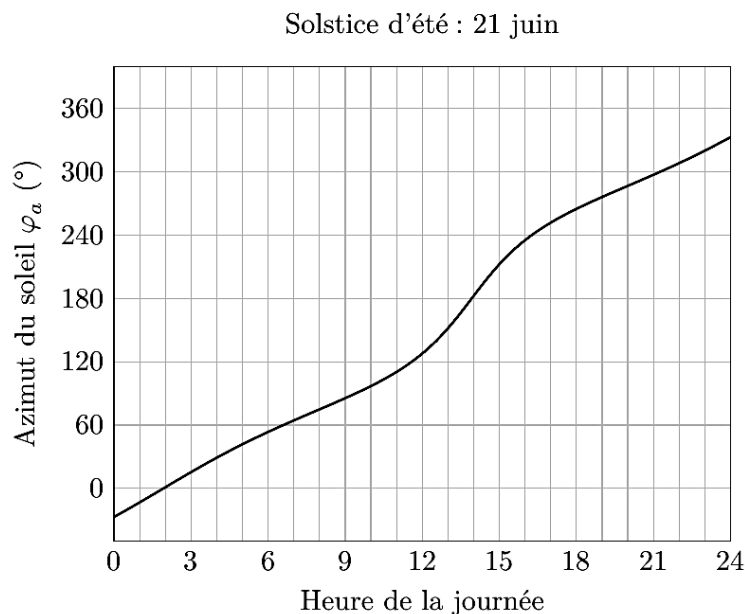


FIGURE 3 – Évolution de l'azimut du soleil ( $\varphi_a$  en degrés) au solstice d'été

On s'intéresse maintenant au déplacement de la voile. Afin d'assurer un pilotage sans à-coup, le profil de vitesse retenu pour la commande de la voile est en forme de trapèze (figure 4).

**Question 2 :** Sachant que les phases d'accélération et de décélération durent chacune 3 s, déterminer la durée de déplacement  $d_{cste}$  à la vitesse maximale (de  $t_1$  à  $t_2$ ) pour suivre le soleil pendant l'intervalle de temps de 15 min. Exprimer  $d_{cste}$  en fonction de  $\Omega_{max}$  et de  $\varphi_{a\ max}$ .

**Question 3 :** En déduire la durée totale du déplacement,  $d_{totale}$  (de  $t_0$  à  $t_3$ ), avec ce profil de vitesse. Conclure par rapport au cahier des charges.

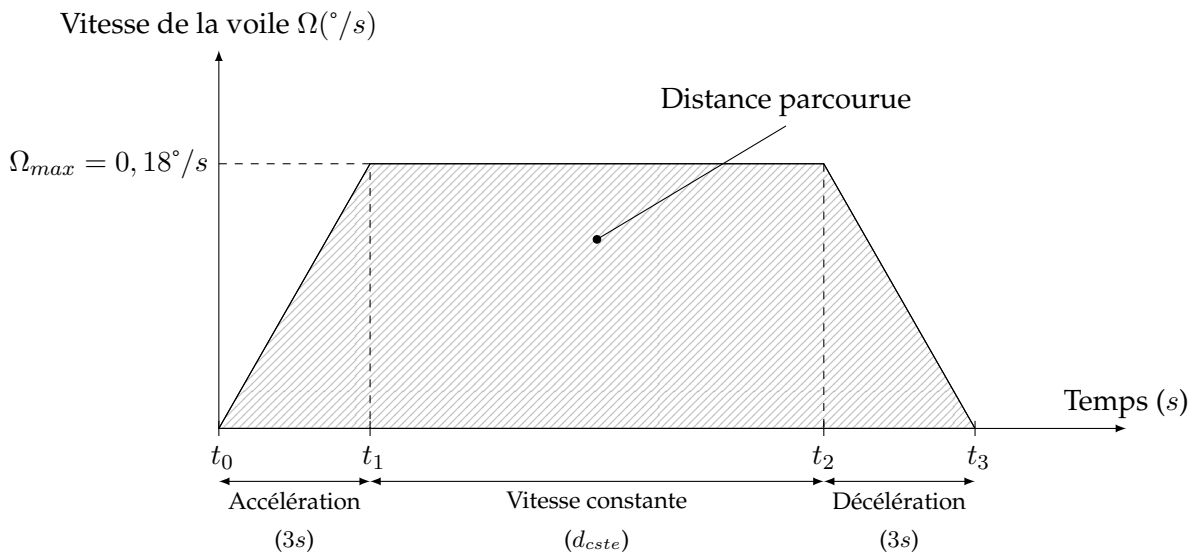


FIGURE 4 – Profil de vitesse de la voile

Face à un tel défi architectural, cette voile est en réalité constituée de deux demi-voiles afin de limiter les contraintes techniques d'une solution à une seule voile de très grandes dimensions :

- le coût de fabrication d'une seule voile est plus important que celui de deux demi-voiles au regard des dimensions mises en jeu ;
- l'influence du vent est réduite sur deux demi-voiles plutôt que sur une seule voile.

Pour ces deux raisons, les ingénieurs responsables de l'étude ont choisi de concevoir cette voile à partir de deux demi-voiles de même géométrie. Les motorisations des demi-voiles étant indépendantes, il est proposé d'implanter la même commande pour gérer le déplacement de chacune d'entre elles pour des raisons de simplicité et de coût.

En revanche, afin que la voile globale suive correctement le soleil, il est impératif que les déplacements de ces deux demi-voiles soient synchronisés. Ce dernier point constitue l'objet d'étude du sujet proposé.

Afin de justifier de la nécessité d'une synchronisation des déplacements des deux demi-voiles, il est proposé de s'intéresser dans la partie II à l'analyse des performances de la commande en boucle ouverte de leurs déplacements.

La partie III abordera l'étude de la commande corrigée en boucle fermée après avoir mis en place les modèles dynamiques nécessaires.

Enfin, la partie IV permettra de valider le schéma de commande proposé des deux demi-voiles afin d'assurer la synchronisation de leurs déplacements lors du suivi du soleil.

## II Analyse de la commande en boucle ouverte du déplacement de la voile solaire

Les deux demi-voiles sont mises en mouvement de manière indépendante par des chariots motorisés, appelés chariots centraux, ainsi qu'une couronne motorisée déplaçant chacun des sommets des demi-voiles par l'intermédiaire de bielles. Des chariots latéraux, non motorisés, participent au guidage des demi-voiles sur les rails de la voie de roulement.

Soit le référentiel galiléen  $R_g(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  associé au sol et le repère  $R_{C_G}(C_G, \vec{x}_{C_G}, \vec{y}_{C_G}, \vec{z})$  associé au chariot central gauche. On note  $\overrightarrow{OC_G} = R \cdot \vec{y}_{C_G}$  avec  $R = 22,750 \text{ m}$ , rayon médian de la voie de roulement. Globalement, la voile se déplace en rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  dans le référentiel galiléen  $R_g$ . Ce mouvement de rotation est défini par l'angle  $\varphi_G = (\vec{y}, \vec{y}_{C_G})$  (figure 5).

Chaque chariot (central et latéral) se déplace grâce à quatre galets, appelés galets de roulement, qui roulent sur les deux rails circulaires concentriques de la voie médiane de roulement et grâce à quatre autres galets de guidage qui roulent sur les côtés des deux rails. Chacun des deux chariots centraux est motorisé à l'aide de deux motoréducteurs (figure 6) qui entraînent chacun en rotation deux des quatre galets de roulement.

Afin d'optimiser son rendement énergétique, cette voile se déplace chaque jour toutes les 15 minutes pour suivre le soleil du garage est au garage ouest à la vitesse angulaire maximale de  $0,18^\circ/s$ . La nuit, elle retourne au garage est en effectuant le trajet inverse et le cycle recommence le jour suivant. En cas de panne de la motorisation d'un chariot central, l'autre chariot central doit être capable de déplacer l'ensemble des deux demi-voiles. À cet effet, les deux chariots centraux qui déplacent chaque demi-voile sont reliés entre eux par une barre de remorquage (figure 7).

Un capteur d'effort est installé sur la barre pour détecter la présence d'un effort de remorquage. Une alarme de sécurité est alors activée pour signaler le défaut.

Pour éviter de solliciter la barre de remorquage, qui pourrait provoquer un déclenchement intempestif de cette alarme, un jeu de 15 mm a été prévu entre les deux chariots centraux. Ainsi, lorsque la commande des deux chariots est « idéale », ils sont indépendants et l'écart de position entre les deux chariots est constant.

La chaîne d'acquisition et l'asservissement des dispositifs motorisés n'étant pas idéaux, cet écart varie et peut déclencher l'alarme de sécurité, même si aucune motorisation n'est en panne.

Un extrait du cahier des charges fonctionnel du système de mise en mouvement des voiles, détaillant les exigences de déplacement de la voile, est présenté tableau 2.

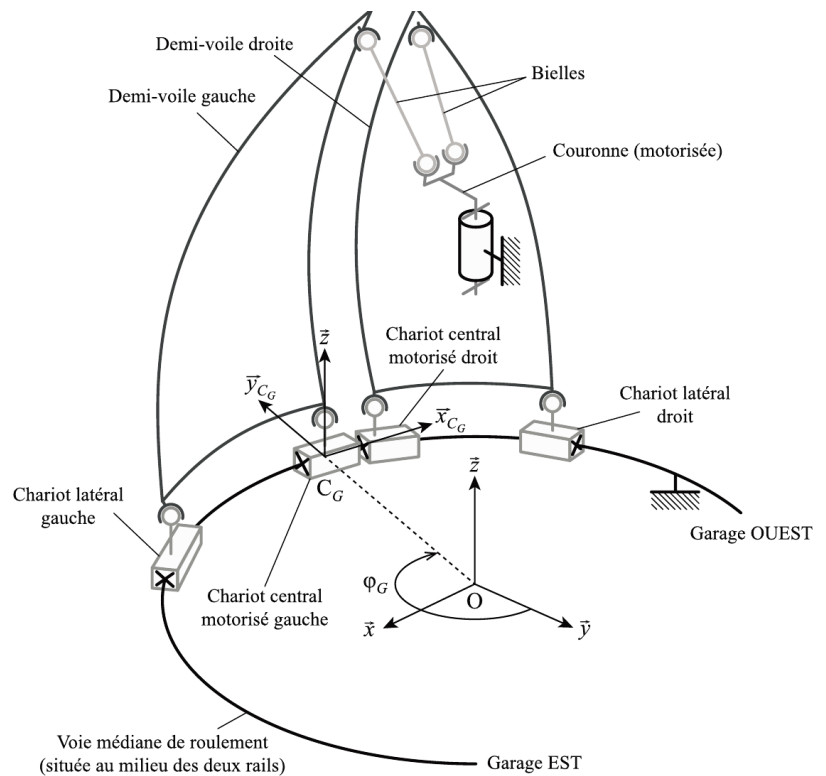


FIGURE 5 – Schéma d'architecture de la voile solaire

Afin d'assurer le bon fonctionnement du système de mise en mouvement de la voile, il est nécessaire de vérifier l'exigence Id 1.5.

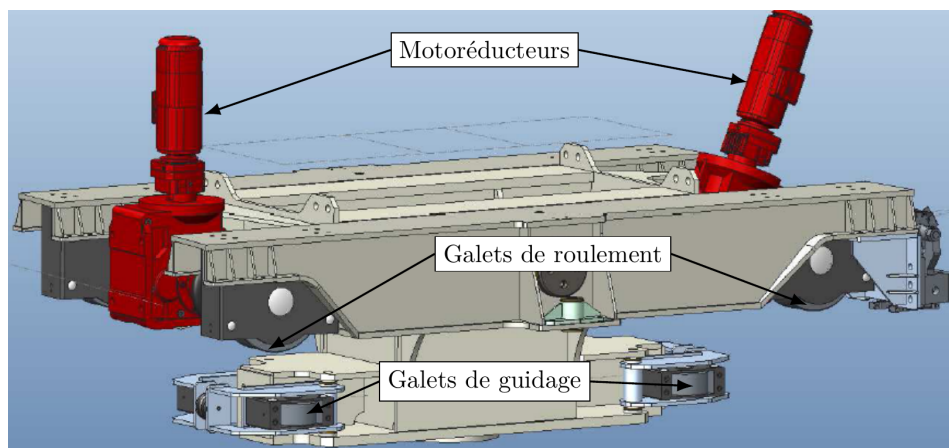


FIGURE 6 – Vue d'un chariot central équipé de 2 motoréducteurs, 4 galets de roulements et 4 galets de guidage

| Id  | Exigence                                                          | Critère                                          | Niveau            |
|-----|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------|
| 1.3 | La voile doit résister au vent                                    | Vitesse du vent                                  | $< 9 \text{ m/s}$ |
| 1.4 | Le déplacement de la voile doit être insensible aux perturbations | Erreur statique pour une perturbation en échelon | Nulle             |
| 1.5 | Le déplacement des deux voiles doit être identiques               | Ecart de déplacement entre les deux voiles       | $< 15 \text{ mm}$ |

TABEAU 2 – Extrait du cahier des charges

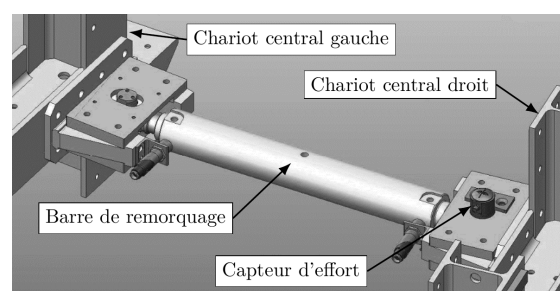


FIGURE 7 – Barre de remorquage

### Objectif

Analyser le déplacement des deux demi-voiles lors de l'utilisation d'une commande simple en boucle ouverte.

Toutes les 15 minutes, les deux demi-voiles se déplacent pour atteindre la position correspondant à l'azimut du soleil à l'heure considérée. Afin d'effectuer un premier dimensionnement en phase d'avant-projet des solutions techniques choisies, un modèle multiphysique simple de la chaîne de traction d'un chariot motorisé est réalisé (figure 8). *On se place dans le cas le plus défavorable avec un seul motoréducteur fonctionnel qui entraîne deux galets de roulement (roue).*

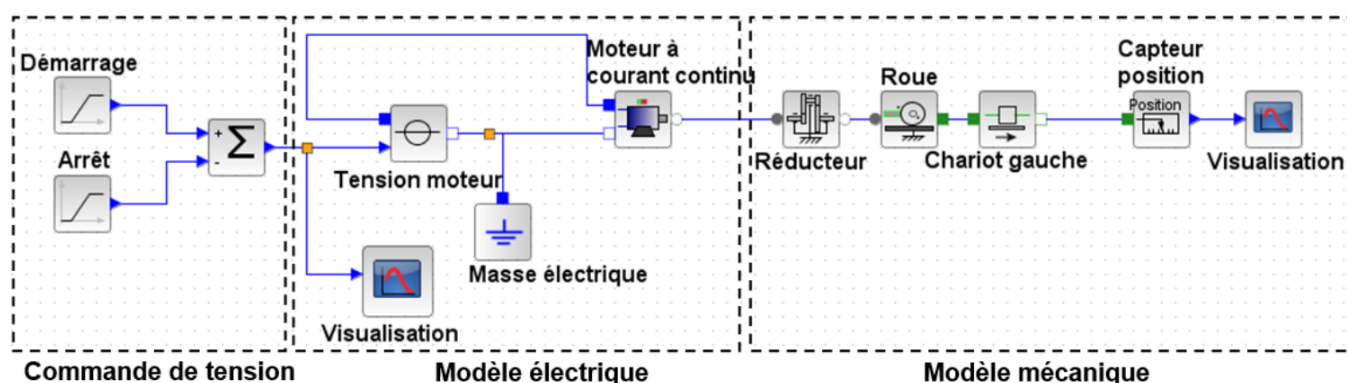


FIGURE 8 – Modèle multiphysique du déplacement d'une demi-voile

Le modèle multiphysique est constitué de trois parties :

- commande en tension qui résulte de la superposition de deux rampes pour générer la loi de vitesse trapézoïdale;
- modèle électrique avec un MCC alimenté (courant nominal de 10,5 A) par une source de tension idéale (550V);
- modèle mécanique constitué d'un réducteur, d'une roue de chariot, d'une masse mobile de la demi-voile et d'un capteur de position.

Une première simulation est présentée figure 9. On appelle déplacement du chariot gauche par rapport au sol le déplacement du point  $C_G$  par rapport à  $R_g$ . On rappelle  $\overrightarrow{OC_G} = R \cdot \vec{y}_{C_G}$  avec  $R = 22,750 \text{ m}$ .

**Question 4 :** À partir des courbes figure 9, conclure quant au respect des exigences Id 1.1 et Id 1.2.

Lors de son déplacement, il peut arriver que la voile soit soumise à l'effet du vent. Il est donc important de le prendre en compte dans le modèle pour évaluer son impact sur le déplacement. Dans la suite, on se place dans le cas le plus défavorable où le vent va s'appliquer comme une perturbation extérieure **uniquement sur une des demi-voiles**. Une simulation du déplacement à vitesse maximale d'un chariot central a été réalisée avec et sans vent dans le modèle multiphysique. Les résultats obtenus sont présentés figure 10.

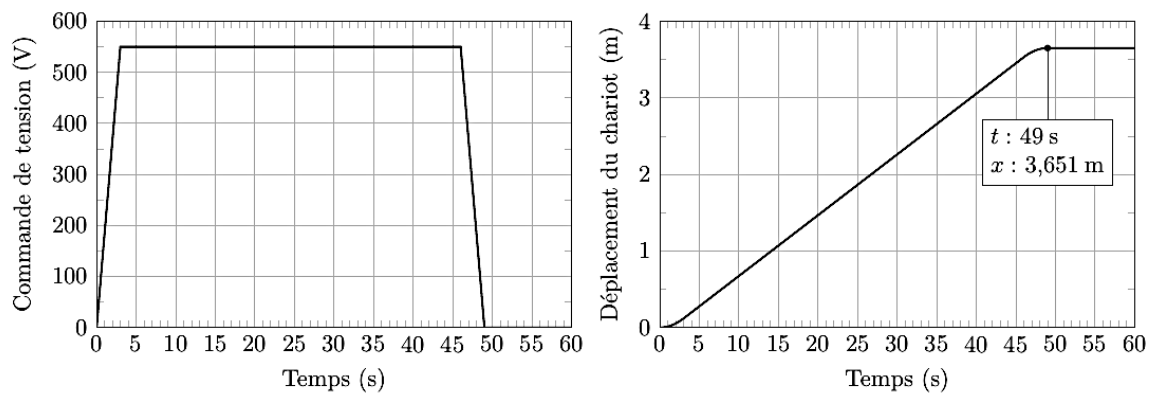


FIGURE 9 – Résultats de simulation

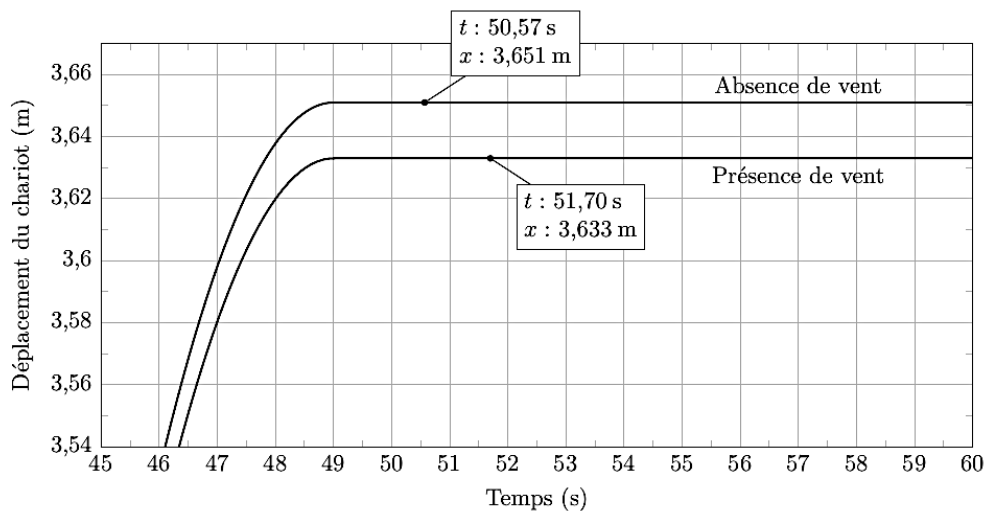


FIGURE 10 – Comparaison du déplacement simulé d'un chariot avec et sans vent

**Question 5 :** On suppose que les deux chariots centraux sont pilotés avec la même loi de commande, en déduire le défaut maximal de position relatif entre les deux chariots dans le cas réel présenté figure 10. Conclure quant au respect de l'exigence concernée.

### III Étude de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée

Afin de réduire les coûts, on supposera que les deux solutions retenues pour la commande de chaque chariot sont strictement identiques.

Après avoir constaté les limites de la commande en boucle ouverte, il est proposé dans cette partie d'étudier la commande en boucle fermée du déplacement d'un chariot. Cette étude consiste à s'intéresser à la mise en place d'un asservissement de vitesse qui permettrait d'assurer un défaut relatif de position entre les deux demi-voiles respectant le défaut relatif de 15 mm autorisé par la barre de traction.

Le déplacement  $x_{ch}(t)$ , d'un chariot s'effectue en imposant une consigne de trapèze de vitesse au moteur notée  $\omega_c(t)$  (figure 11).

La structure de la commande en position d'une demi-voile est représentée figure 12. Les grandeurs définies sont les suivantes :

- $u_c(t)$ , signal de commande du hacheur ;
- $\omega_m(t)$ , vitesse de rotation du moteur ;
- $m(t)$ , signal image de la vitesse de rotation du moteur.

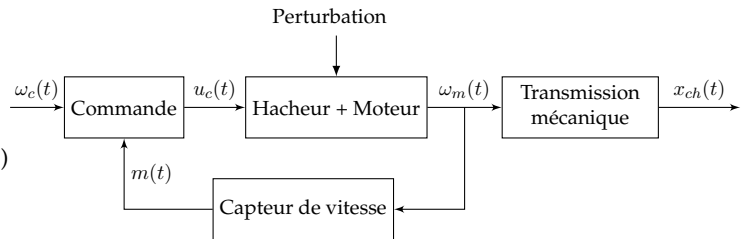
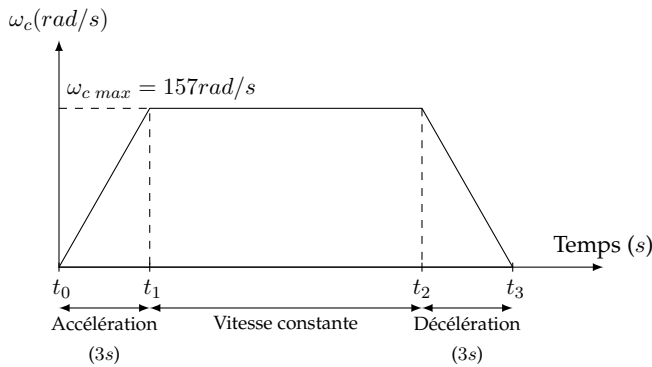


FIGURE 12 – Schéma fonctionnel de la commande

FIGURE 11 – Vitesse de consigne imposée au moteur

#### III.1 Modélisation dynamique de la voile

##### Objectif

Dans cette sous-partie, il est proposé de s'intéresser à la modélisation de la chaîne d'énergie et des différentes perturbations à considérer dans l'asservissement permettant le déplacement d'un chariot central afin de déterminer l'équation dynamique du moteur.

##### III.1.1 Modélisation de la transmission mécanique

On se propose de modéliser la chaîne de transmission mécanique entre le moteur et la voie de roulement. Chaque chariot central est mis en mouvement à l'aide :

- d'un moteur électrique de 4 kW ;
- d'un réducteur à train épicycloïdal de rapport de transmission  $K_{red} = \frac{\omega_r(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{512}$ , avec  $\omega_r(t)$  et  $\omega_m(t)$  les vitesses de rotation respectives de l'arbre de sortie du réducteur et du moteur (en rad/s) ;
- de galets de roulement (roues) de diamètre  $D = 520,5 \text{ mm}$  liés à l'arbre de sortie du réducteur.

**Question 6 :** En précisant l'hypothèse utilisée, exprimer la vitesse de déplacement de la demi-voile  $V_{ch}$  en fonction de  $\omega_m$ , de  $D$  et de  $K_{red}$ .

**Question 7 :** À partir des informations précédentes, compléter les fonctions de transfert de la zone « Transmission mécanique » du schéma-blocs sur la figure 18 du document réponse.

On souhaite maintenant déterminer les perturbations qui s'exercent lors du déplacement de la voile pour mettre en place l'équation dynamique de comportement de la voile.

### III.1.2 Modélisation des perturbations

Afin de déterminer les perturbations à prendre en compte sur le déplacement de la voile, on se propose de déterminer l'effort du vent sur le chariot central d'une demi-voile ainsi que le moment résistant s'opposant au roulement des galets sur le rail.

#### a) Détermination de l'effort du vent sur la demi-voile

On choisit de représenter une demi-voile, de repère  $R_v(O, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z})$ , par une portion de demi-sphère (figure 13). On pourra remarquer qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les repères  $R_{C_G}(C_G, \vec{x}_{C_G}, \vec{y}_{C_G}, \vec{z})$  et  $R_v(O, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$ , associé à la demi-voile. On rappelle que  $\vec{OC}_G = R \cdot \vec{y}_{C_G}$ , avec R le rayon moyen de la voie de roulement.

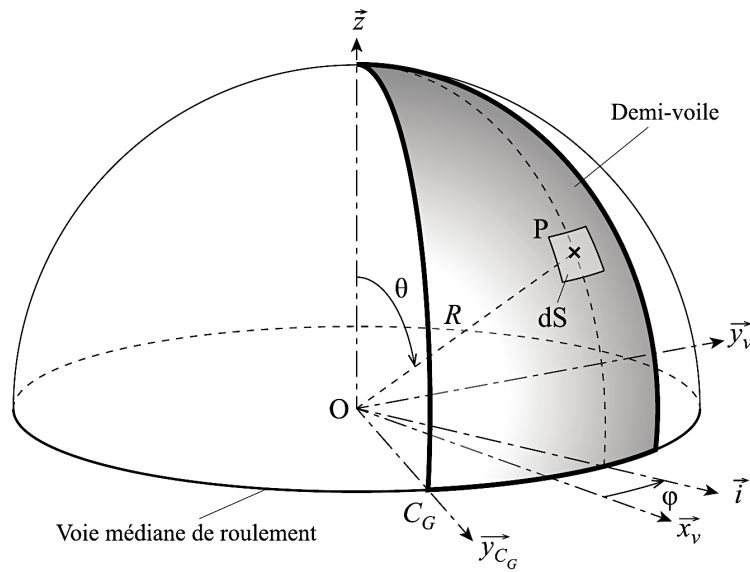


FIGURE 13 – Paramétrage de la surface totale et élémentaire en coordonnées sphériques de la demi-voile

La figure 14 présente l'orientation du vent par rapport au plan de symétrie de la demi-voile dans le plan  $(\vec{x}_v, \vec{y}_v)$ .

La densité d'effort surfacique du vent sur la demi-voile, pour une vitesse de 9 m/s, est notée  $\vec{f}_{vent} = f\vec{u}$  avec  $f = 54,7 N.m^{-2}$ , l'orientation de  $\vec{u}$  étant définie par l'angle constant  $\alpha = (\vec{x}_v, \vec{u})$ .

La base associée au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  est  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . La position du point P appartenant à la demi-voile est définie par  $\vec{OP} = R \cdot \vec{e}_r$  avec R le rayon moyen de la voie de roulement ( $R = 22,750 m$ ).

L'angle azimutal  $\varphi$  évolue entre  $-\frac{\pi}{8}$  et  $\frac{\pi}{8}$  et l'élévation  $\theta$  évolue entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

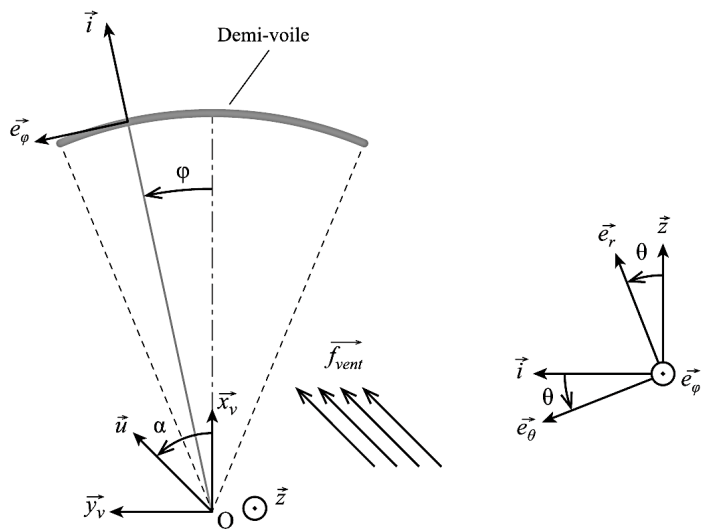


FIGURE 14 – Paramétrage angulaire

On précise que, dans le cas présenté figure 13, la surface élémentaire en coordonnées sphériques est notée :  $dS = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ .

**Question 8 :** Exprimer l'effort élémentaire du vent sur la demi-voile s'appliquant au point P sur la surface dS, noté  $d\vec{F}_{vent}$ .

**Question 9 :** Donner la définition du moment résultant au point O de l'action mécanique du vent  $\vec{M}_{O,vent}$  en fonction de l'effort élémentaire du vent  $d\vec{F}_{vent}$  s'appliquant au point P sur la surface dS. Puis déterminer par intégration l'expression de  $\vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z}$ , moment de l'action mécanique du vent selon l'axe  $(O, \vec{z})$  s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  en fonction de  $R, f$  et  $\alpha$ .

**Question 10 :** On définit  $F_{vent}$  tel que  $(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{vent} \cdot \vec{x}_{C_G}) \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z}$ . En déduire l'expression de  $F_{vent}$  l'effort du vent au point  $C_G$  s'opposant au déplacement du chariot central.

Afin de modéliser le déplacement de la voile dans le cas le plus défavorable, on souhaite déterminer la valeur maximale de  $|F_{vent}|$ .

**Question 11 :** Pour quelle valeur de  $\alpha$  cet effort est-il maximal ? Déterminer la valeur maximale de  $|F_{vent}|$ .

La valeur de l'effort résistant du vent étant maintenant déterminée, il reste à calculer la perturbation due à la résistance au roulement sur les galets des chariots.

Le rayon de la voie de roulement ( $R = 22,750$  m) étant grand devant le déplacement d'un chariot (3,20 m), ce déplacement sera considéré comme étant une translation de direction tangentielle à la voie de roulement. Jusqu'à la fin du sujet, on supposera donc que la trajectoire de  $C_G$  est une droite de direction  $\vec{x}_{C_G}$  et que la voile se translate par rapport à la voie de roulement lors d'un déplacement. Ainsi les liaisons entre la voile et les chariots seront considérées comme des liaisons glissières de direction  $\vec{x}_{C_G}$ . L'action du vent sera représentée par un glisseur de résultante  $F_{vent} \cdot \vec{x}_{C_G}$ .

*b) Détermination du moment de résistance au roulement des galets sur le rail*

Chaque demi-voile est mise en mouvement par deux chariots : un chariot latéral et un chariot central. Chaque chariot comporte 8 galets (figure 6) : 4 galets de roulement et 4 galets de guidage. La figure 15 représente le paramétrage d'une demi-voile et du chariot central. Les galets de roulement roulant sur 2 rails parallèles, seuls les galets de roulement en contact avec un rail ont été représentés.

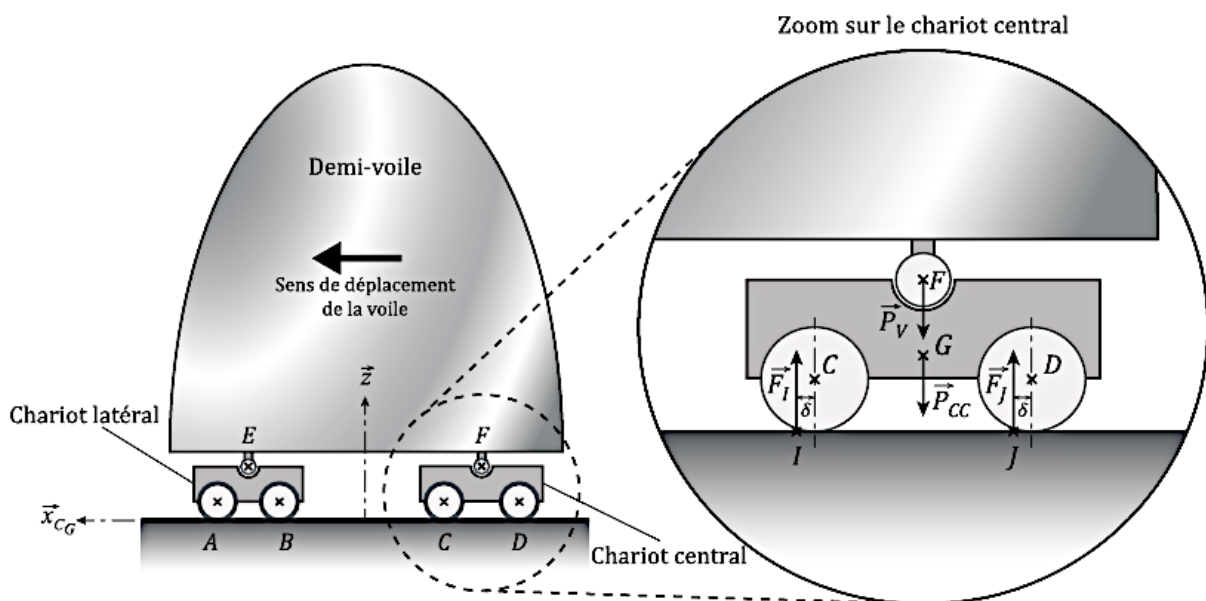


FIGURE 15 – Paramétrage de la demi-voile et modélisation des actions mécaniques appliquées sur le chariot

## Hypothèses et modélisation

- Le problème sera considéré comme un problème plan  $(\vec{x}_{CG}, \vec{z})$ . Seuls 2 galets de roulement par chariot seront considérés pour les calculs (figure 15).
- L'influence de l'action mécanique du vent sur la demi-voile est négligée devant celle de son poids. En supposant la demi-voile comme étant symétrique, les actions mécaniques de celle-ci sur les chariots central (cc) et latéral (cl) sont données par :

$$\left\{ \mathcal{T}_{v \rightarrow cc} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{m_v}{2} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_F \quad \left\{ \mathcal{T}_{v \rightarrow cl} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{m_v}{2} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$$

- Afin de prendre en compte la résistance au roulement, les résultantes des actions mécaniques de contact entre le rail et les galets de roulement, sont décalées d'une distance  $\delta$ , appelée coefficient de résistance au roulement, par rapport au point de contact (figure 15). Ces actions mécaniques sont donc notées :

$$\left\{ \mathcal{T}_{r \rightarrow cc}^I \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_I \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I \quad \left\{ \mathcal{T}_{r \rightarrow cc}^J \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_J \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J$$

Les moments de résistance au roulement autour des axes de rotation des galets créés par les actions mécaniques en  $I$  et  $J$ , respectivement notés  $\vec{M}_C$  et  $\vec{M}_D$ , sont définis par :

$$\left\{ \mathcal{T}_{r \rightarrow cc}^I \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_I \vec{z} \\ \vec{M}_C \end{array} \right\}_C \quad \left\{ \mathcal{T}_{r \rightarrow cc}^J \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_J \vec{z} \\ \vec{M}_D \end{array} \right\}_D$$

- L'action mécanique de la pesanteur sur le chariot central est :

$$\left\{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow cc} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_{cc} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

### Données :

- masse de la demi-voile  $m_v = 120 \text{ t}$  ;
- masse du chariot central  $m_{cc} = 15 \text{ t}$  ;
- masse du chariot latéral  $m_{cl} = 8 \text{ t}$  ;
- $\vec{GF} = a \vec{z}$  ;
- $\vec{CI} = \vec{DJ} = \delta \vec{x}_{CG} - \frac{D}{2} \vec{z}$  ;
- coefficient de résistance au roulement  $\delta = 5 \text{ mm}$  ;
- diamètre d'un galet de roulement  $D = 520,5 \text{ mm}$  ;
- $G$  centre de gravité du chariot central ;
- $\vec{GC} = l \vec{x}_{CG} - b \vec{z}$  ;
- $\vec{GD} = -l \vec{x}_{CG} - b \vec{z}$  ;

Dans la suite, on cherche à déterminer le moment de résistance au roulement global, noté  $\vec{M}_{glob}$ , produit par le roulement des galets sur le rail afin de prendre en compte cette perturbation dans le modèle d'asservissement complet.

**Question 12 :** En isolant l'ensemble  $cc = \{\text{chariot central} + \text{galets de roulement}\}$  et après avoir justifié que  $\vec{a}_{G_{cc}/R_g} \cdot \vec{z} = 0$ , déterminer  $F_I + F_J$ , on précisera le théorème utilisé.

**Question 13 :** Exprimer le moment de résistance au roulement en  $C$ , noté  $\vec{M}_C$ , en fonction de  $F_I$  et  $\delta$ .

**Question 14 :** Par analogie, exprimer  $\vec{M}_D$  en fonction de  $F_J$  et  $\delta$ , puis exprimer le moment de résistance au roulement du chariot central  $\vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D$  en fonction de  $\delta, m_v, m_{cc}$  et  $g$ .

**Question 15 :** Par analogie, déterminer le moment de résistance au roulement des galets de roulement du chariot latéral, noté  $\vec{M}_{cl}$ . En déduire le moment de résistance au roulement total des galets de roulement,  $\vec{M}_{glob}$ . Effectuer l'application numérique.

Ayant déterminé les actions mécaniques s'opposant au déplacement de la demi-voile, il est maintenant possible de déterminer l'équation dynamique caractérisant son déplacement.

### III.1.3 Détermination de l'inertie équivalente de la partie mobile

Afin de modéliser le comportement dynamique du système, on se propose de déterminer l'inertie équivalente rapportée sur l'arbre moteur de l'ensemble mobile, noté  $E$ , d'une demi-voile, notée  $J_{eq}$ . La demi-voile est entraînée par le chariot central qui se déplace grâce à des galets de roulement qui roulent sans glisser sur la voie de roulement. Ceux-ci sont entraînés en rotation par le motoréducteur.

Cet ensemble mobile  $E$  est constitué de :

- la demi-voile de masse  $m_v = 120 \text{ t}$ ;
- du chariot central de masse totale  $m_{cc} = m_s + m_g + 2m_{mr} = 15 \text{ t}$ , lui-même constitué de :
  - un ensemble de pièces, de masse  $m_s$ , constituant la structure et les équipements du chariot,
  - deux motoréducteurs, chacun de masse  $m_{mr}$  et de moment d'inertie  $J_{mr} = 194,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ ,
  - 4 galets de roulement de masse totale  $m_g$ , de diamètre  $D = 520,5 \text{ mm}$  et d'inertie totale rapportée à l'arbre de sortie du réducteur  $J_g = 27 \text{ kg.m}^2$ ;
- du chariot latéral de masse équivalente totale  $m_{cl} = 8 \text{ t}$ ;
- les galets de guidage sont de masses et d'inerties négligeables.

Le moteur tourne à une vitesse  $\omega_m$  et les galets de roulement tournent à la vitesse de sortie du réducteur  $\omega_r$  et le mouvement de la voile est modélisé par un mouvement de translation à une vitesse  $V_{ch}(t)$ .

L'énergie cinétique totale  $E_c$  de l'ensemble mobile  $E$  dans le référentiel galiléen  $R_g$  a pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2}(m_v + m_{cc} + m_{cl})V_{ch}^2 + J_g\omega_r^2 + J_{mr}\omega_m^2$$

**Question 16 :** A partir de la relation établie Question 6, déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente,  $J_{eq}$ , de l'ensemble mobile  $E$  rapporté sur l'arbre moteur telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}J_{eq}\omega_m^2$$

### III.1.4 Détermination de l'équation dynamique de la voile

Cette partie traite de résolution dynamique à l'aide des théorèmes énergétiques que vous verrez plus tard dans l'année, on admettra le résultat suivant :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) + \frac{D}{2} K_{red} \cdot F_{vent}(t) + K_{red} \cdot M_{glob}(t)$$

**Question 17 :** À partir de ces informations, compléter les fonctions de transfert de la zone «Perturbations» du schéma-blocs sur la figure 18 du document réponse.

Le modèle dynamique du système étant maintenant complet, on souhaite développer le modèle d'asservissement de la demi-voile et étudier ses performances.

### III.2 Modélisation de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée

#### Objectif

Une fois la modélisation de l'asservissement mise en place, il est proposé de valider une solution de correction permettant de répondre aux caractéristiques imposées par le constructeur.

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  sera écrite  $F(p)$  dans le cas général.

Chaque chariot central est mis en mouvement à l'aide :

- d'un moteur électrique de 4 kW (afin de faciliter l'étude du système, on supposera que le moteur est modélisé par une machine à courant continu équivalente)
  - tension nominale  $U_{nom} = 550 \text{ V}$ ,
  - intensité nominale  $I_{nom} = 10,5 \text{ A}$ ,
  - vitesse nominale  $N_{nom} = 1500 \text{ tr/min}$ ;
- d'une interface de puissance (hacheur) de gain  $K_h = 110$  sans unité;
- d'un réducteur à engrenages de rapport de transmission  $K_{red} = \frac{\omega_r(t)}{\omega_m(t)}$ ;
- de galets de roulement (roues) de diamètre  $D = 520,5 \text{ mm}$  liés à l'arbre de sortie du réducteur.

La commande du déplacement est réalisée à partir des éléments suivants :

- un capteur de vitesse de gain  $K_{capt} = 1/30 \text{ V.rad}^{-1}.s$ ;
- un correcteur proportionnel de gain  $C$ ;
- un convertisseur de consigne de gain  $K_a$ .

On donne les équations modélisant le fonctionnement du moteur à courant continu :

- loi des mailles aux bornes du moteur à courant continu :  $u_m(t) = R.i_m(t) + L \frac{di_m(t)}{dt} + e_m(t)$
- théorèmes généraux de la dynamique :  $J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) + \frac{D}{2} K_{red} \cdot F_{vent}(t) + K_{red} \cdot M_{glob}(t)$
- lois de couplage électromécanique :  $C_m(t) = k_c \cdot i_m(t)$  et  $e_m(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$

Avec :

- $u_m(t)$  la tension d'alimentation du moteur à courant continu utilisé (en volts);
- $i_m(t)$  le courant d'induit du moteur (en ampères);
- $e_m(t)$  la force contre électromotrice (fcem) du moteur (en volts);
- $R = 1 \Omega$  la résistance d'induit du moteur; —  $L = 0,0035 \text{ H}$  l'inductance d'induit du moteur;
- $k_c = 3,5 \text{ N.m.A}^{-1}$  la constante de couple; —  $k_e = 3,5 \text{ V.rad}^{-1}.s$  la constante de fcem du moteur;
- $J_{eq} = 6,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg.mm}^2$  inertie totale des solides en mouvement ramenée sur l'arbre moteur.

**Question 18 :** À partir des informations précédentes, compléter les fonctions de transfert manquantes du schéma-blocs sur la figure 18 du document réponse.

**Question 19 :** Déterminer l'expression de  $K_a$  qui assure que l'écart  $\varepsilon(t)$  soit une image pertinente de l'erreur, c'est-à-dire que l'écart soit nul si la consigne de vitesse du moteur,  $\omega_c(t)$ , est égale à la grandeur mesurée,  $\omega_m(t)$ .

L'ensemble des questions traitées jusqu'à présent dans la partie III a permis d'établir le schéma-blocs de la commande en vitesse d'une demi-voile. Il est proposé dans la sous-partie suivante d'analyser les performances de cette commande non corrigée.

### III.3 Étude des performances de la boucle de vitesse non corrigée

Il est rappelé que la consigne de vitesse en entrée de l'asservissement est la consigne de vitesse du moteur exprimée en  $rad.s^{-1}$  et notée  $\omega_c(t)$ . Dans cette sous-partie, le correcteur est de gain unitaire  $C = 1$ .

Afin d'étudier la sensibilité de l'asservissement aux perturbations, il est supposé que  $\omega_c(t) = 0 \text{ rad/s}$ .

On pose  $C_{pert}(t) = \frac{D}{2} K_{red} \cdot F_{vent}(t) + K_{red} \cdot M_{glob}(t)$

**Question 20 :** Exprimer la fonction de transfert  $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ . La mettre sous la forme  $H_r(p) = \frac{\alpha(1 + \tau p)}{1 + \gamma p + \beta p^2}$ , en exprimant  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  en fonction des différents paramètres de l'étude.

Les applications numériques conduisent à :  $H_r(p) = \frac{1 + 1,0035p}{25 + 5,65 \cdot 10^{-2}p + 2 \cdot 10^{-4}p^2}$

**Question 21 :** Déterminer la variation de vitesse du moteur, en régime permanent, sous l'effet d'un couple de perturbation  $C_{pert}(t) = C_0 \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  l'échelon de Heaviside. Conclure quant à la satisfaction de l'exigence Id 1.4.

#### III.3.1 Asservissement avec prise en compte des perturbations

##### Objectif

Les sous-parties précédentes ont permis d'analyser les perturbations s'exerçant sur un chariot ainsi que leur influence sur une commande non corrigée. Il est proposé dans cette section d'appliquer une action correctrice à la commande afin de respecter le cahier des charges.

On rappelle tableau 3 les exigences de l'asservissement.

La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) de la boucle de vitesse non corrigée a pour expression :

$$H_{BO} = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1,05}{1 + 5 \cdot 10^{-3}p + 1,9 \cdot 10^{-5}p^2}$$

L'ajout d'un correcteur proportionnel intégral est envisagé sa fonction de transfert est :  $C(p) = C \cdot \frac{1 + T_i p}{T_i p}$ .

Pour régler le correcteur on choisit :

$$\frac{1}{T_i} = \omega_0$$

| Id  | Exigence                                                          | Critère                                          | Niveau            |
|-----|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------|
| 1.3 | La voile doit résister au vent                                    | Vitesse du vent                                  | $< 9 \text{ m/s}$ |
| 1.4 | Le déplacement de la voile doit être insensible aux perturbations | Erreur statique pour une perturbation en échelon | Nulle             |
| 1.5 | Le déplacement des deux voiles doit être identiques               | Ecart de déplacement entre les deux voiles       | $< 15 \text{ mm}$ |

TABLEAU 3 – Extrait du cahier des charges

avec  $\omega_0$  : pulsation propre de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

**Question 22 :** Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en gain et en phase du correcteur  $C(p)$ , avec  $C = 1$ , sur la figure 19 du document réponse.

**Question 23 :** Après correction, que devient l'erreur statique sous l'effet d'un couple de perturbation en échelon  $C_{pert}(t) = C_0 \cdot u(t)$  calculée Q21 ? Conclure quant à l'intérêt du correcteur proportionnel intégral vis-à-vis de l'exigence Id 1.4.

## IV Conclusion

Une fois le correcteur réglé, on commande les demi-voiles avec les mêmes consignes de vitesse en trapèze. Cependant le modèle de simulation a été enrichi afin de prendre en compte certains phénomènes : variation des caractéristiques moteurs, liaisons non parfaites...

La figure 16 présente l'écart de déplacement relatif entre les deux voiles suite à la commande du modèle de simulation enrichi pour un déplacement de l'ensemble mobile au cours d'un cycle de 15 min. Il y a évidemment plusieurs cycles de 15 min sur une journée.

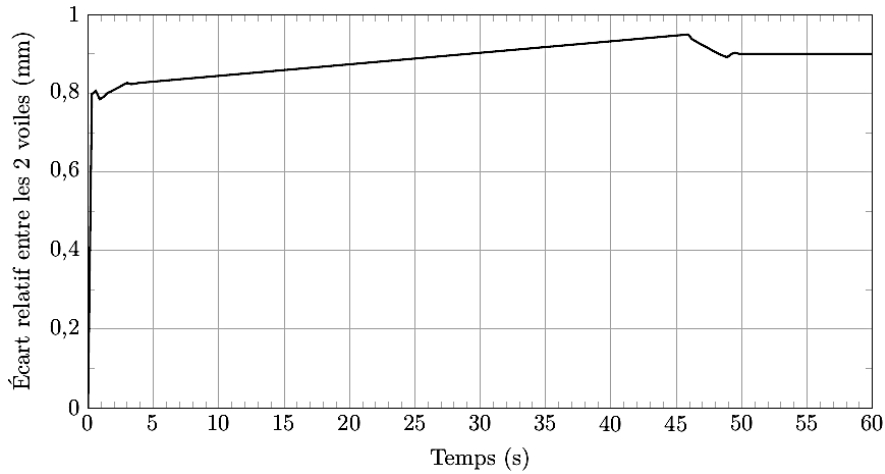


FIGURE 16 – Écart relatif entre les 2 demi-voiles en mm avec système corrigé

**Question 24 :** Justifier qu'il est nécessaire de mettre en place une solution de synchronisation pour le déplacement des demi-voiles entre les garages est et ouest.

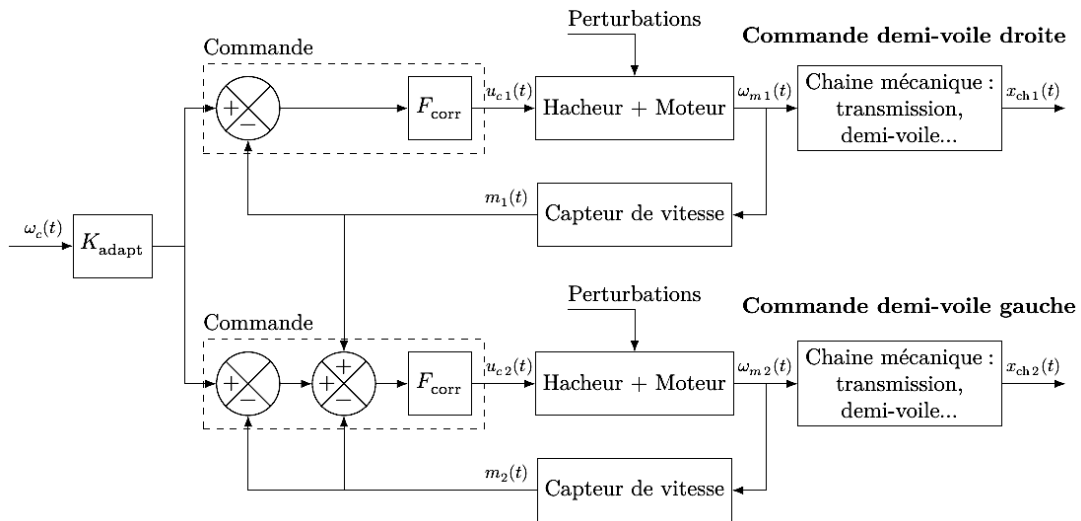


FIGURE 17 – Schéma de synchronisation des commandes en déplacement des demi-voiles

**Question 25 :** Exprimer  $u_{c2}(t)$  en fonction de  $\omega_c$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $K_{adapt}$  et  $F_{corr}$ . À partir de cette expression, justifier que le schéma de synchronisation proposé permet de corriger correctement le système en cas d'écart entre les vitesses des deux moteurs, on pourra étudier les cas «chariot 2 en retard sur le chariot 1» et «chariot 1 en retard sur le chariot 2».

... FIN ...