Dynamique des Systèmes Mécaniques 1
Théorèmes Généraux

Spé MP–MP* 2026-2027

Lycée Thiers Marseille

Objectif :

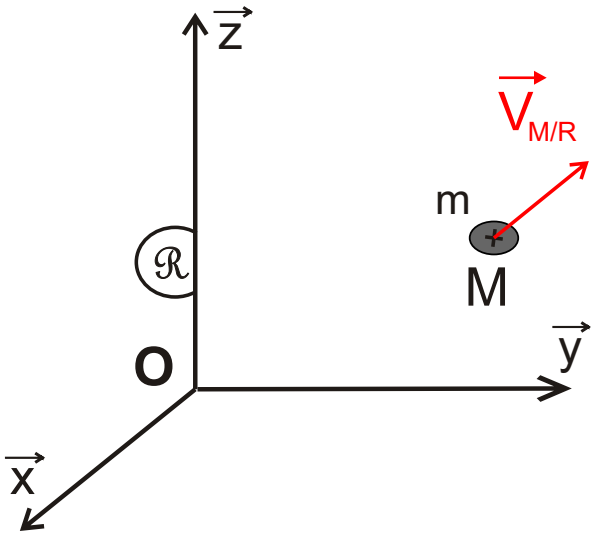
Relier le **mouvement d'un ensemble matériel** et les **actions mécaniques qui lui sont appliquées**, afin :
➢ d'établir les **équations du mouvement** d'un système mécanique (E) connaissant les efforts extérieurs qui lui sont appliqués, ou
➢ de déterminer des **actions mécaniques inconnues** (notamment celles développées par les actionneurs) s'exerçant sur le système (E), son mouvement étant imposé.

Hypothèses : solides **indéformables** et à **masse conservative**

- Centre de gravité d'un solide S : $\displaystyle\int_{M\in S} \boldsymbol{\overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}}$ ou $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m_S}\displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM}.dm$
- Principe de conservation de la masse : $\forall t\ m_S(t) = cte$ ou $\boldsymbol{\dfrac{dm_S}{dt} = 0}$

  ➢ Conséquence : $\boldsymbol{\left[\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{M\in S}\vec{f}(M,t).dm\right]_{\mathcal{R}} = \int_{M\in S}\left[\dfrac{d}{dt}\vec{f}(M,t)\right]_{\mathcal{R}}.dm}$

  $\vec{f}(M,t)$ pouvant être le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_{(M,S/\mathcal{R})}$ ...



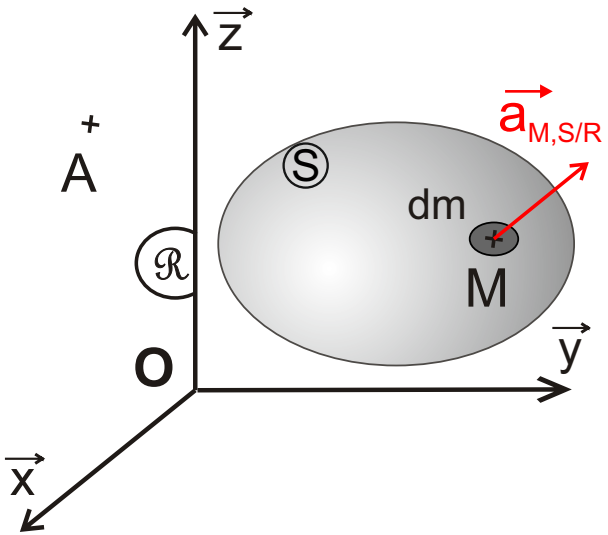
La quantité de mouvement d'un point matériel M lie sa masse m et sa vitesse dans son mouvement par rapport à (R) :

$$\vec{p}_{(M/R)} = m.\vec{V}_{(M/R)}$$

Principe Fondamental de la dynamique pour un point matériel

Il existe au moins un référentiel (espace-temps) galiléen (Rg) tel que, pour tout point matériel M, la variation temporelle de la quantité de mouvement de M par rapport à (Rg) est constamment égale à la résultante des forces appliquées à M :

$$\left.\frac{d\vec{p}_{(M/R_g)}}{dt}\right|_{R_g} = m.\vec{a}_{(M/R_g)} = \vec{R}_{(Ext\to M)}$$



$\vec{a}_{(M,S/R)}.dm$: quantité d'accélération élémentaire.

Localement en M :

$$\left\{d\mathcal{D}_{(S/R)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{a}_{(M,S/R)}.dm\\ \vec{0}\end{array}\right\}_M$$

Globalement en A, *l'ensemble des quantités d'accélération du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R)* est caractérisé par :

♥ Torseur dynamique

$$\left\{\mathcal{D}_{(S/R)}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_{d(S/R)}=\int_{M\in S}\vec{a}_{(M,S/R)}dm\\ \vec{\delta}_{A(S/R)}=\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{a}_{(M,S/R)}dm\end{array}\right\}_A$$

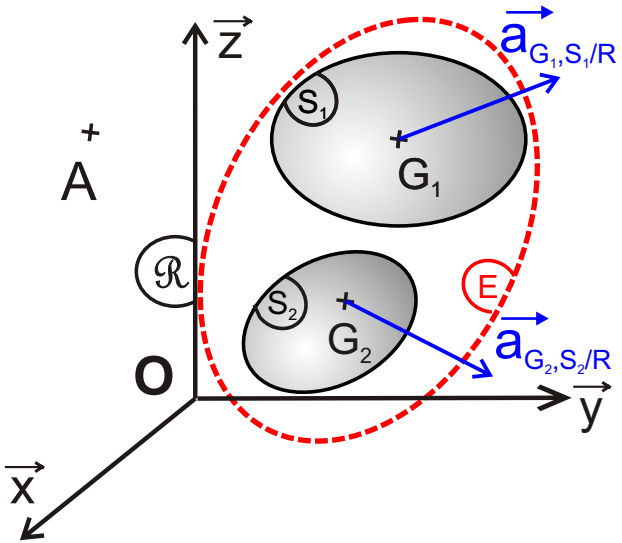
← résultante dynamique de S/R

← moment dynamique en A de S/R

$$\vec{R}_{d(S/R)}=m_S.\vec{a}_{(G,S/R)}$$

$$\vec{\delta}_{B(S/R)}=\vec{\delta}_{A(S/R)}+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{d(S/R)}$$ (Varignon)

4.1 - Dynamique d'un ensemble matériel : PFD



♥ Ensemble matériel $(E) = S_1 \bigcup S_2$

$$\{\mathcal{D}_{(E/R)}\} = \{\mathcal{D}_{(S_1/R)}\} + \{\mathcal{D}_{(S_2/R)}\}$$

$$\overrightarrow{R_{d(E/R)}} = m_1 . \overrightarrow{a}_{(G_1,S_1/R)} + m_2 . \overrightarrow{a}_{(G_2,S_2/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{A(E/R)} = \overrightarrow{\delta}_{A(S_1/R)} + \overrightarrow{\delta}_{A(S_2/R)}$$

♥ ♥ Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Il existe au moins un espace-temps galiléen (= référentiel R_g) tel que pour tout ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (E) dans R_g est constamment égal à la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées à (E) :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{(E/R_g)}\} = \sum \{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}}$$

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen

On notera indifféremment $\{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}$ ou $\sum \{\mathcal{T}_{(Ext \to E)}\}$,"Ext" représente TOUTES les actions mécaniques extérieures.

4.2 - Dynamique d'un ensemble matériel : Théorèmes Généraux

♥ ♥ ♥ Théorème de la Résultante Dynamique

TRD : $\boxed{m_E . \overrightarrow{a}_{(G,E/R_g)} = \sum m_i . \overrightarrow{a}_{(G_i,S_i/R_g)} = \sum \overrightarrow{R}_{(Ext \to E)}}$

♥ ♥ ♥ Théorème du Moment Dynamique en A

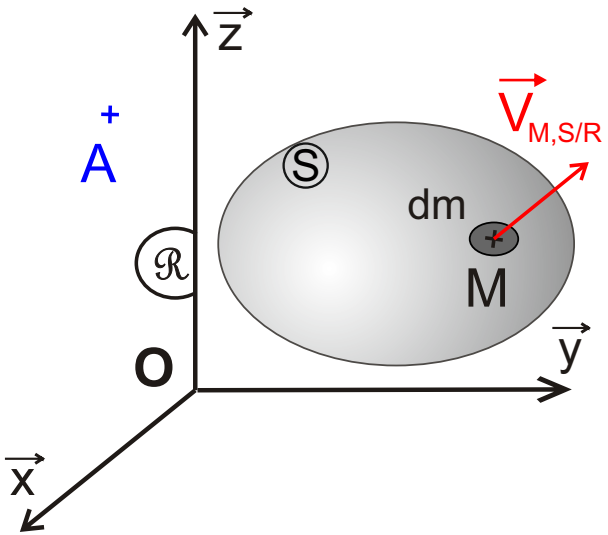
TMD en A : $\boxed{\vec{\delta}_{A(E/R_g)} = \sum \vec{\delta}_{A(S_i/R_g)} = \sum \overrightarrow{M}_{A\ (Ext \to E)}}$

♥ ♥ ♥ Principe Fondamental de la Statique

- TRS : $\sum \overrightarrow{R}_{(Ext \to E)} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{a}_{(G,E/R_g)} = \overrightarrow{0}$ ou négligeable ou $m_E = 0$ ou négligeable,
- TMS en A : $\sum \overrightarrow{M}_{A\ (Ext \to E)} = \overrightarrow{0}$ si $\vec{\delta}_{A(E/R_g)} = \overrightarrow{0}$ ou négligeable.

Le Principe Fondamental de la Dynamique permet de relier :
➢ les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur un système matériel (E), déjà étudiées en STATIQUE
➢ et la CINÉMATIQUE de ce système matériel (E), par rapport à un référentiel, avec prise en compte de la distribution de sa masse (masse+inertie) : **CINÉTIQUE**

5 - Cinétique du solide indéformable



$\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm$: quantité de mouvement élémentaire.

Localement en M :

$$\{dC_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_M$$

Globalement en A, *l'ensemble des quantités de mouvement du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R)* est caractérisé par :

♥ Torseur cinétique

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{c(S/R)}}=\displaystyle\int_{M\in S}\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm\\ \overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}=\displaystyle\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm\end{array}\right\}_A$$

← résultante cinétique de S/R

← moment cinétique en A de S/R

$$\overrightarrow{R_{c(S/R)}}=m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{B(S/R)}}=\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_{c(S/R)}}$$ (Varignon)

6 - Torseurs Cinétique et Dynamique d'une masse ponctuelle

Soit (S) une masse ponctuelle m placée en G :

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{c(S/R)}}=m.\overrightarrow{V}_{(G/R)}\\ \overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G \qquad \{\mathcal{D}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{d(S/R)}}=m.\overrightarrow{a}_{(G/R)}\\ \overrightarrow{\delta_{G(S/R)}}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$$

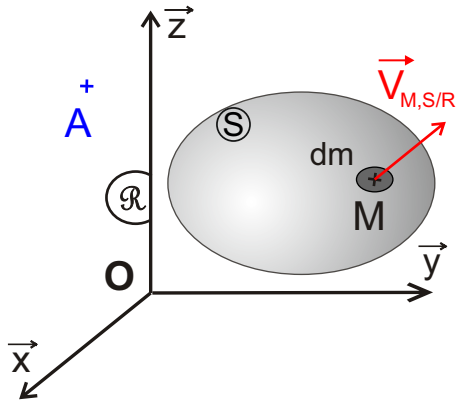
Au point A quelconque :

$$\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}=\int_{M\in S}\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}dm=\overrightarrow{AG}\wedge m.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}}=\int_{M\in S}\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}dm=\overrightarrow{AG}\wedge m.\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}$$

L'écriture sous forme de torseur est compatible avec l'écriture du PFD vu en physique.

7.1 Relation entre les éléments des Torseurs Dynamique et Cinétique : Résultantes



Torseur Cinétique

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{c(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm=m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}\\ \\ \overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm\end{array}\right\}_A$$

Torseur Dynamique

$$\{\mathcal{D}_{(S/R)}\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{d(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm=m_S.\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}\\ \\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm\end{array}\right\}_A$$

$\Rightarrow$ Relation entre $\overrightarrow{R_{d(S/R)}}$ et $\overrightarrow{R_{c(S/R)}}$

$$\boxed{\overrightarrow{R_{d(S/R)}}=\left.\frac{d\overrightarrow{R_{c(S/R)}}}{dt}\right|_R}$$

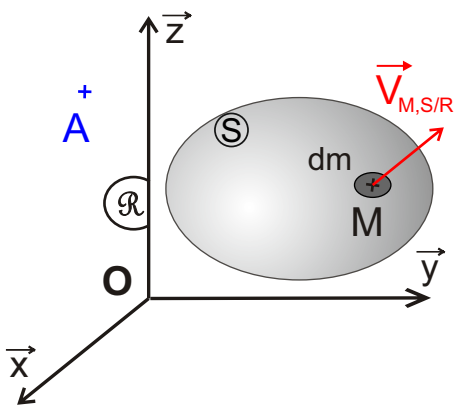
Idée : Dériver $\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}$ afin de trouver une relation avec $\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}}$

7.2 Relation entre les éléments des Torseurs Dynamique et Cinétique : Moments

$$\left.\frac{\overrightarrow{d\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm\right]_R = \int_{M\in S}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}\right)\right]_R dm$$

$$= \int_{M\in S}\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_R\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm + \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}}{dt}\right|_R dm$$

$$= \int_{M\in S}\left(\overrightarrow{V}_{(M,S/R)} - \overrightarrow{V}_{(A/R)}\right)\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm + \underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{a}_{(M,S/R)}dm}_{\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)}}$$



$$\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \left.\frac{\overrightarrow{d\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R + \int_{M\in S}\overrightarrow{V}_{(A/R)}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}dm$$

8 - Eléments de réduction du Torseur Dynamique

♥ ♥ ♥ A retenir...

$$\boxed{\overrightarrow{R_{d(S/R)}} = m_S . \overrightarrow{a}_{(G,S/R)}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left.\frac{\overrightarrow{d\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}}$$

$\overrightarrow{V}_{(A/R)}$: vecteur vitesse du point géométrique A par rapport à R, n'appartient pas forcément à S.

♥ Si $\overrightarrow{V}_{(A/R)} = \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$: A = G

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{G(S/R)}} = \left.\frac{\overrightarrow{d\sigma_{G(S/R)}}}{dt}\right|_R}$$

Si $\overrightarrow{V}_{(A/R)} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{V}_{(A/R)} \,//\, \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$

$$\overrightarrow{\delta_{A(S/R)}} = \left.\frac{\overrightarrow{d\sigma_{A(S/R)}}}{dt}\right|_R$$

Double produit vectoriel

Le **double produit vectoriel** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se calcule par la formule de Gibbs :

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}).\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}).\vec{w}}$$

Le second membre se lit : $\vec{u}$ ***scalaire*** $\vec{w}$ ***porté par*** $\vec{v}$ *moins* $\vec{u}$ ***scalaire*** $\vec{v}$ ***porté par*** $\vec{w}$

Produit mixte

Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on appelle **produit mixte**, la quantité : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$

Invariance par permutation circulaire : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) \cdot \vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{v}$

Nullité si un vecteur apparait 2 fois : $\left(\vec{u} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{w} = 0$

Changement de signe si permutation de 2 vecteurs : $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{w}$