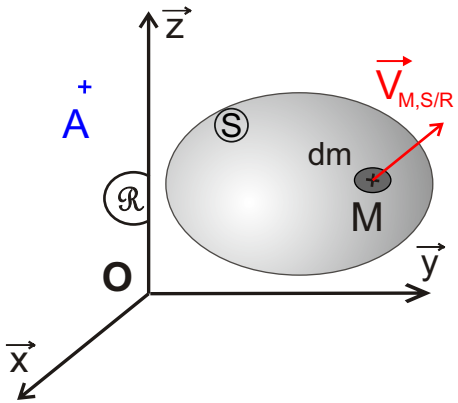
Dynamique des Systèmes Mécaniques 2
Cinétique

Spé MP–MP* 2026-2027

Lycée Thiers Marseille

1.1 Torseurs Dynamique et Cinétique : Rappel Définitions



Torseur Cinétique

$$\left\{\mathcal{C}_{(S/R)}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{c(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm=\boldsymbol{m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm\end{array}\right\}_A$$

Torseur Dynamique

$$\left\{\mathcal{D}_{(S/R)}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_{d(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm=\boldsymbol{m_S.\overrightarrow{a}_{(G,S/R)}}\\ \overrightarrow{\delta_{A(S/R)}}=\int\limits_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{a}_{(M,S/R)}.dm\end{array}\right\}_A$$

Avec $\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\delta_{A(S/R)}}}=\left.\boldsymbol{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A(S/R)}}}{dt}}\right|_R+\boldsymbol{\overrightarrow{V}_{(A/R)}\wedge m_S.\overrightarrow{V}_{(G,S/R)}}}$

$\overrightarrow{V}_{(A/R)}$: vecteur vitesse du point géométrique A par rapport à R, n'appartient pas forcément à S.

Objectif : Exprimer $\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}$, moment cinétique en A de S par rapport à R.

2.1 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Calcul du moment cinétique en G

On calcule le moment cinétique de S par rapport à R au point G :

$$\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} \overset{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)} dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{V}_{(G,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

$$= \underbrace{\left(\int_{M\in S} \overrightarrow{GM} dm \right)}_{\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{V}_{(G,S/R)} + \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{GM} \right) .dm$$

Pointeur d'inertie

On définit le *pointeur d'inertie* du solide S au point G appliqué au vecteur $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{J_G}(S, \vec{u}) = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}).dm$$

2.2 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie $\mathbf{I}$(G,S) d'un solide (S) en un point G est l'opérateur linéaire :

$$\vec{u} \longrightarrow \mathbf{I}(\mathrm{G,S})\cdot\vec{u} = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}).dm$$

L'opérateur $\mathbf{I}$(G,S) étant linéaire, il peut être représenté par une matrice.

En posant $\overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$, dans la base $\mathcal{B}_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$:

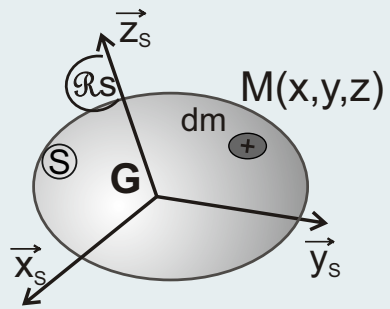
$$[\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}] = -[\overrightarrow{GM} \wedge \vec{u}] = -\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$[\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})] = -\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$[\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM})] = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

2.3 Eléments de réduction du Torseur Cinétique : Matrice d'inertie

♥ ♥ ♥ Matrice d'inertie du solide S exprimée en G dans la base $\mathcal{B}_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$



$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} -xz.dm \\ \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -yz.dm \\ \int_{M\in S} -xz.dm & \int_{M\in S} -yz.dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

A, **B** et **C moments d'inertie**
par rapport à $(G, \vec{x}_s)$, à $(G, \vec{y}_s)$ et à $(G, \vec{z}_s)$
D, **E** et **F produits d'inertie**
Unité : $kg.m^2$

$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{-F} & \boldsymbol{-E} \\ \boldsymbol{-F} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{-D} \\ \boldsymbol{-E} & \boldsymbol{-D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

♥ ♥ Moment cinétique au point G de S par rapport à R

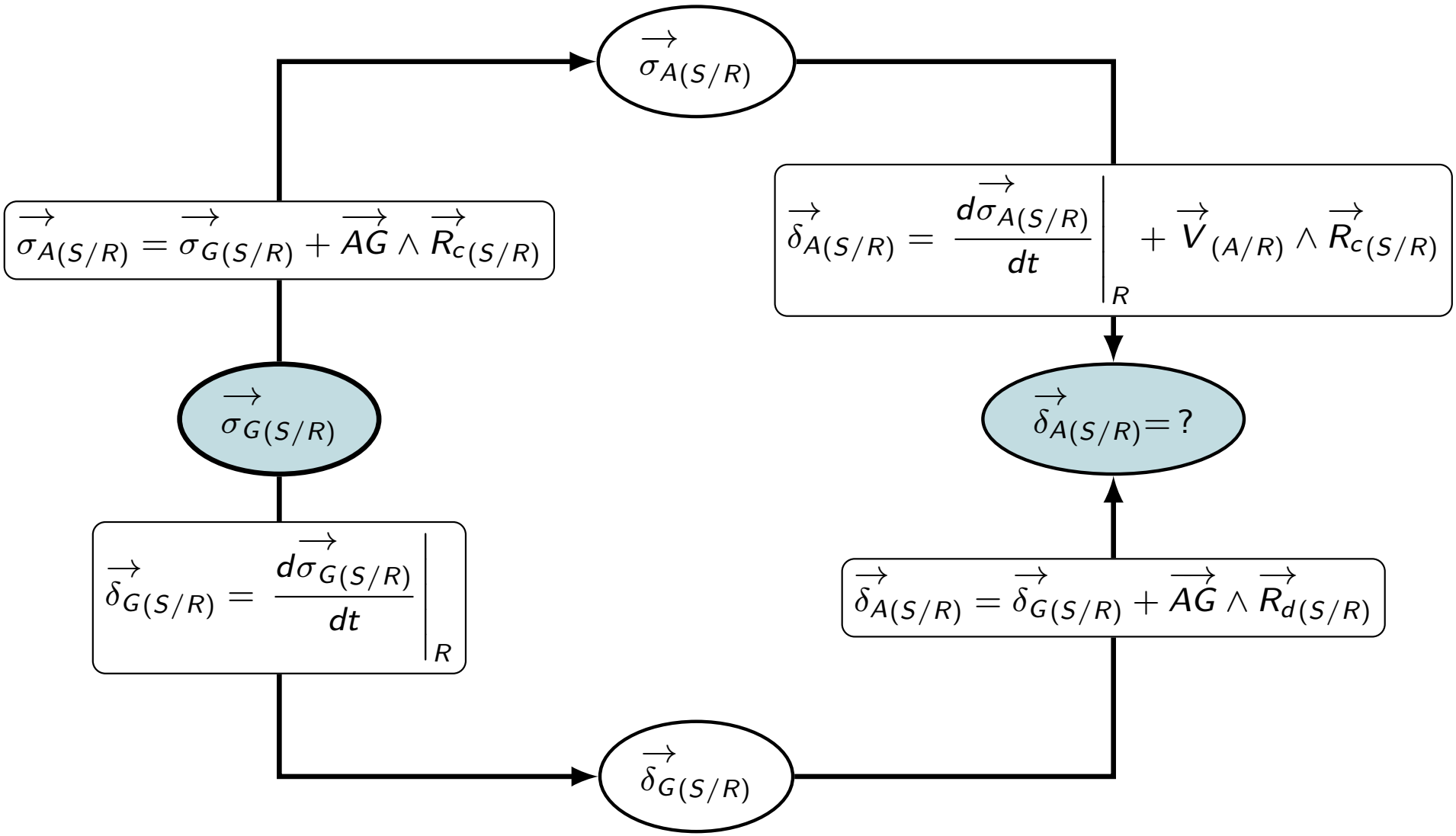
$$\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$$

exprimés dans la **même base**.

En pratique... **Résumé 1**

On connaît la matrice d'inertie au point G : $\mathbf{I}(\mathrm{G,S})$, alors $\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$.

On cherche le moment dynamique au point $A \neq G$: $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = ?$



3.1 Eléments de réduction du Torseur Cinétique si $\mathbf{I}(\mathrm{G},\mathrm{S})$ inconnue : Calcul du moment cinétique en un point A quelconque

Si la matrice d'inertie $\mathbf{I}(\mathrm{A},\mathrm{S})$ de S est connue en A, différent de G :

$$\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} \overset{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{(M,S/R)}.dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm$$

$$= \underbrace{\left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm\right)}_{m_s.\overrightarrow{AG}} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)} + \underbrace{\int_{S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm}_{\mathbf{I}(\mathrm{A},\mathrm{S})\cdot\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}}$$

♥ Moment cinétique en un point A quelconque

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \mathbf{I}(\mathrm{A},\mathrm{S})\cdot\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} + m_s.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)}}$$

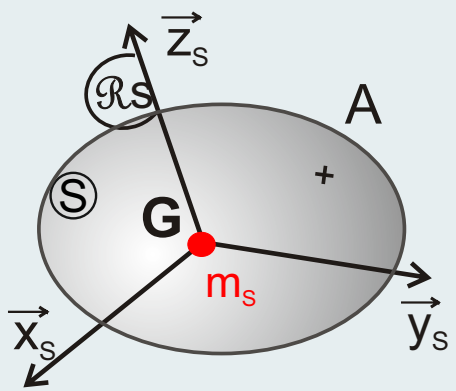
3.2 Eléments de réduction du Torseur Cinétique si $\mathbf{I}(G,S)$ inconnue : Théorème de Huygens

On cherche à calculer la matrice d'inertie du solide (S) en un point A quelconque à partir de la matrice d'inertie au centre de gravité G.

$$\overrightarrow{J_A}(S,\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}).dm = \int_{M\in S} (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) \wedge (\vec{u} \wedge (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})).dm$$

$$= \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm}_{m_s.\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})} + \cancel{\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}).dm} + \cancel{\int_{M\in S} \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM}).dm} + \underbrace{\int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}).dm}_{\overrightarrow{J_G}(S,\vec{u})}$$

Théorème de Huygens



$$\overrightarrow{AG} = a.\vec{x}_s + b.\vec{y}_s + c.\vec{z}_s$$

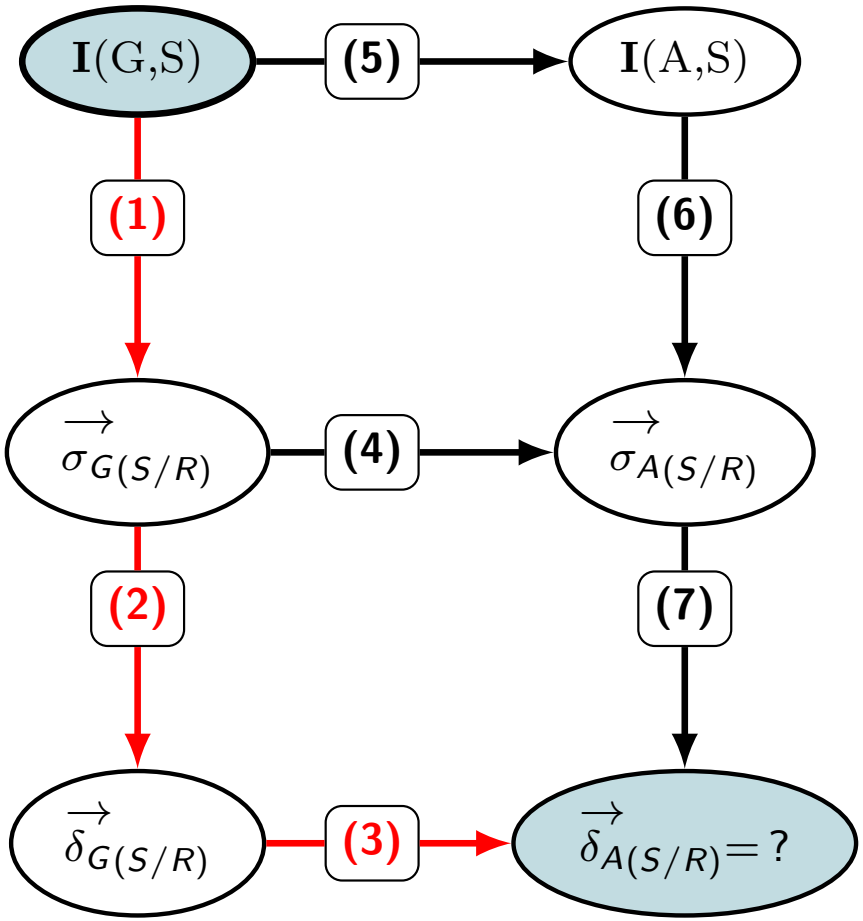
$$\boxed{\mathbf{I}(A,S) = \mathbf{I}(G,S) + \mathbf{I}(A, m_s \text{ concentrée en } G)}$$

$$\boxed{\mathbf{I}(A,S) = \mathbf{I}(G,S) + m_s.\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}}$$

exprimés dans la **même base** $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$

En pratique... **Synthèse**

On cherche le moment dynamique au point $A \neq G$: $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = ?$



(1) $\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} = \mathbf{I}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$

(2) $\overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} = \left. \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)}}{dt} \right|_R$

(3) $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \overrightarrow{\delta}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge m_S . \overrightarrow{a}_{(G,S/R)}$

(4) $\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma}_{G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$

(5) $\mathbf{I}(A,S) = \mathbf{I}(G,S) + \mathbf{I}(A, m_s \text{ concentrée en } G)$

(6) $\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)} = \mathbf{I}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} + m_s . \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{(A,S/R)}$

(7) $\overrightarrow{\delta}_{A(S/R)} = \left. \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}_{A(S/R)}}{dt} \right|_R + \overrightarrow{V}_{(A/R)} \wedge m_S . \overrightarrow{V}_{(G,S/R)}$

Le chemin (1)→(2)→(3) est le plus astucieux