Dynamique des Systèmes Mécaniques 3
Matrice d'inertie d'un solide

Spé MP–MP* 2026-2027

Lycée Thiers Marseille

1.1 Matrice d'inertie : Définition

On rappelle $\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} = \mathbf{I}(\mathrm{G},\mathrm{S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$, avec

$$\mathbf{I}(\mathrm{G},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} -xz.dm \\ \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -yz.dm \\ \int_{M\in S} -xz.dm & \int_{M\in S} -yz.dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

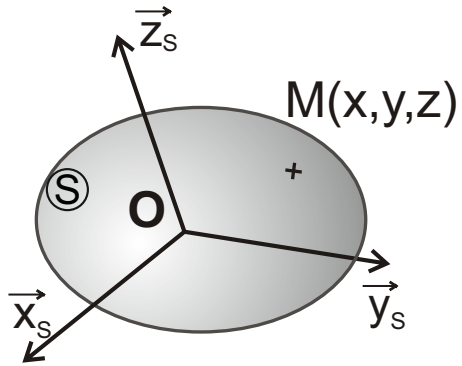
1.1 Matrice d'inertie : Définition

On rappelle $\overrightarrow{\sigma_{G(S/R)}} = \mathbf{I}(\mathrm{G,S}) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$, avec

$$\mathbf{I}(\mathrm{G,S}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} -xz.dm \\ \int_{M\in S} -xy.dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & \int_{M\in S} -yz.dm \\ \int_{M\in S} -xz.dm & \int_{M\in S} -yz.dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)}$$

Objectif : Justifier la forme particulière de la matrice d'inertie en fonction des symétries matérielles d'un solide. On ne demande pas de calculer les éléments de la matrice d'inertie.

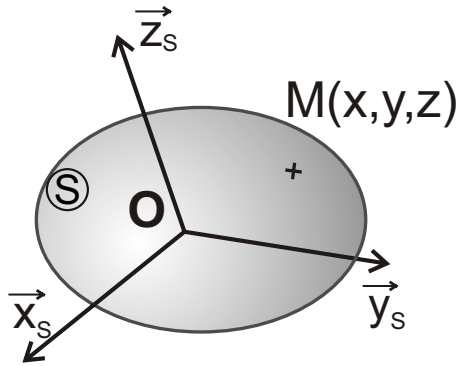
1.2 Matrice d'inertie : Eléments de la matrice d'inertie



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(\mathrm{O},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

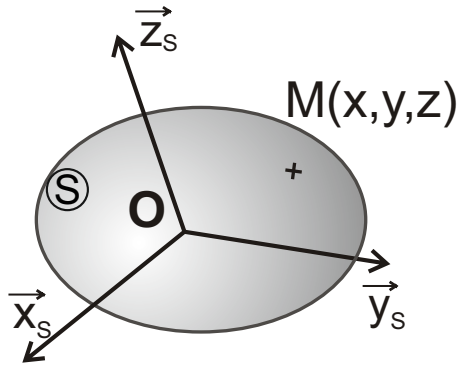
1.2 Matrice d'inertie : Eléments de la matrice d'inertie



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(\mathrm{O},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Eléments de la matrice d'inertie



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

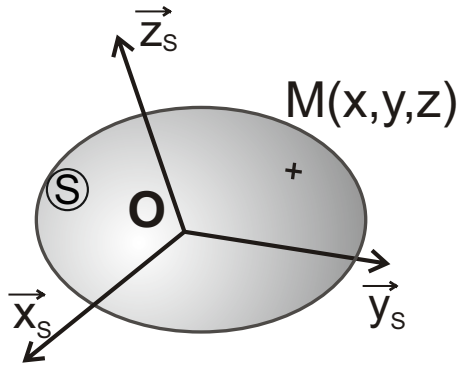
$$\mathbf{I}(\mathrm{O},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Eléments de la matrice d'inertie

Moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{x}_s)$, $(O,\vec{y}_s)$, et $(O,\vec{z}_s)$:

$$A = \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm \qquad B = \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm \qquad C = \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm$$

1.2 Matrice d'inertie : Eléments de la matrice d'inertie



La matrice d'inertie est une **caractéristique** du solide S dans un repère associé à ce solide :

$$\mathbf{I}(\mathrm{O},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Eléments de la matrice d'inertie

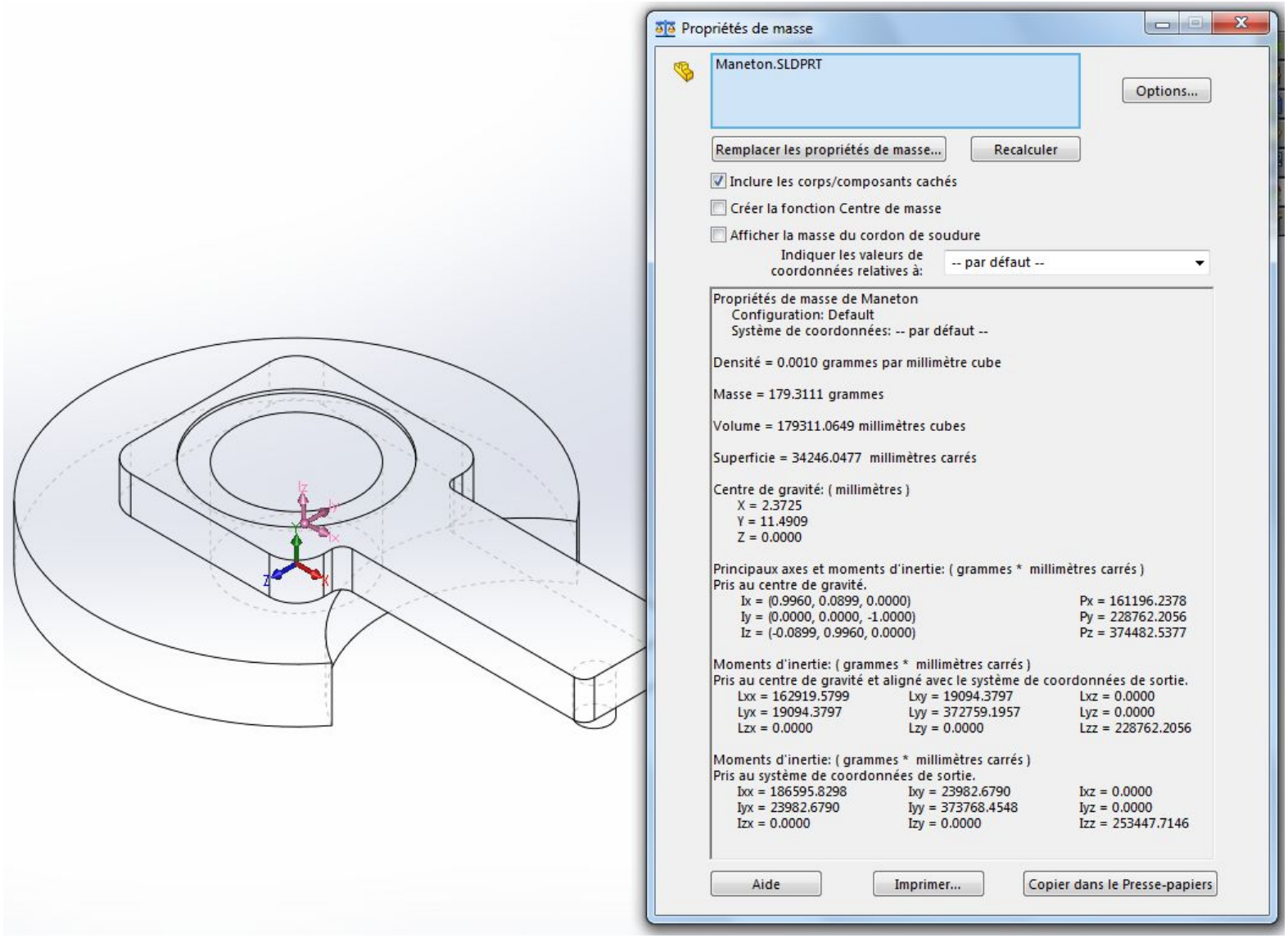
Moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{x}_s)$, $(O,\vec{y}_s)$, et $(O,\vec{z}_s)$:

$$A = \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm \qquad B = \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm \qquad C = \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm$$

Produits d'inertie respectivement par rapport aux plans $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$, $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$:

$$D = \int_{M\in S} yz.dm \qquad E = \int_{M\in S} xz.dm \qquad F = \int_{M\in S} xy.dm$$

1.3 Matrice d'inertie : Approche numérique



1.4 Matrice d'inertie : Repère principal d'inertie

Repère principal d'inertie

1.4 Matrice d'inertie : Repère principal d'inertie

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**.

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**. Si ce point est confondu avec le centre d'inertie G, on parlera de repère central principal d'inertie.

$$\mathbf{I}(\mathrm{G},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C'} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{G},(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

Repère principal d'inertie

Il existe un **repère principal d'inertie** dans lequel la matrice au centre de ce repère est **diagonale**. Si ce point est confondu avec le centre d'inertie G, on parlera de repère central principal d'inertie.

$$\mathbf{I}(\mathrm{G},\mathrm{S}) = \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}_{G,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

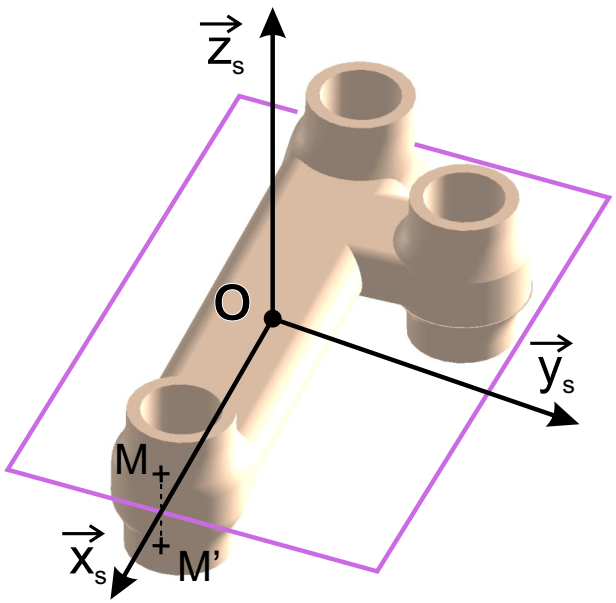
Les moments d'inertie A', B' et C' sont les **moments principaux d'inertie** de S en G (= valeurs propres de l'opérateur d'inertie).

Symétrie matérielle

On parle de symétrie matérielle lorsqu'il y a à la fois symétrie géométrique et symétrie de répartition de masse pour le système considéré.

2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

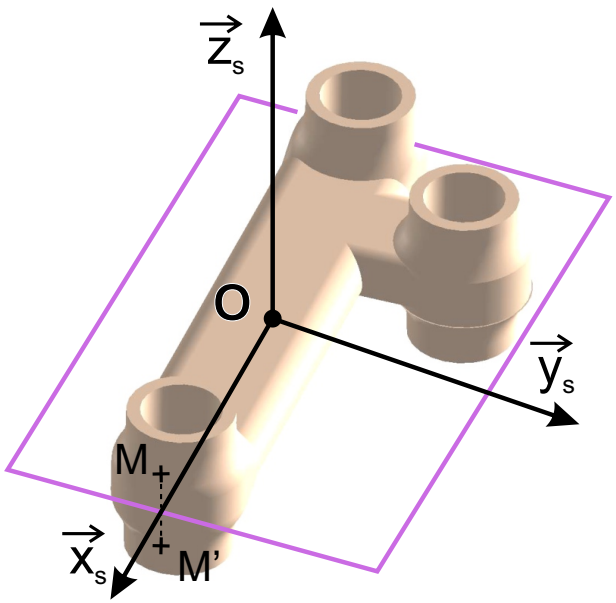
Un plan de symétrie matérielle



2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

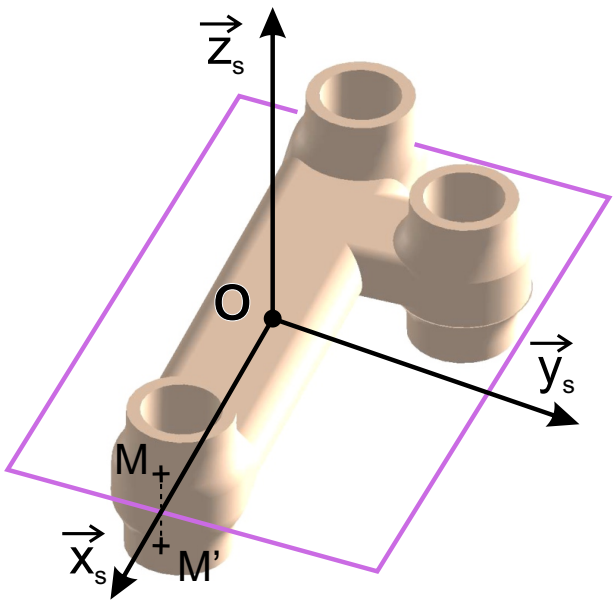
Un plan de symétrie matérielle

S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.



2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

Un plan de symétrie matérielle

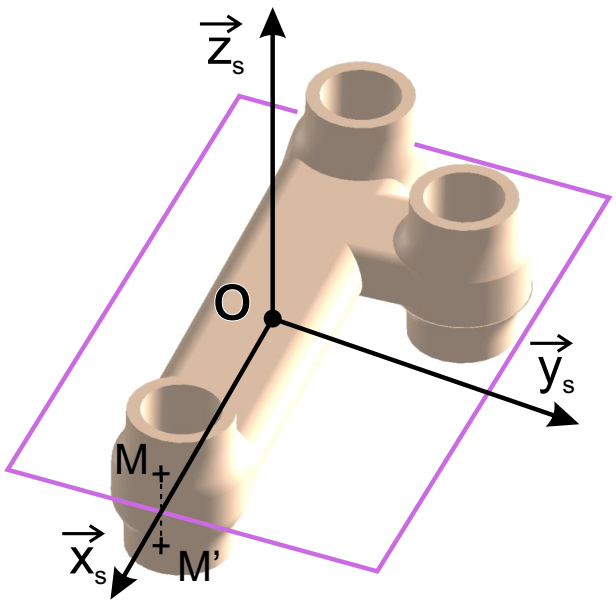


S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

Un plan de symétrie matérielle



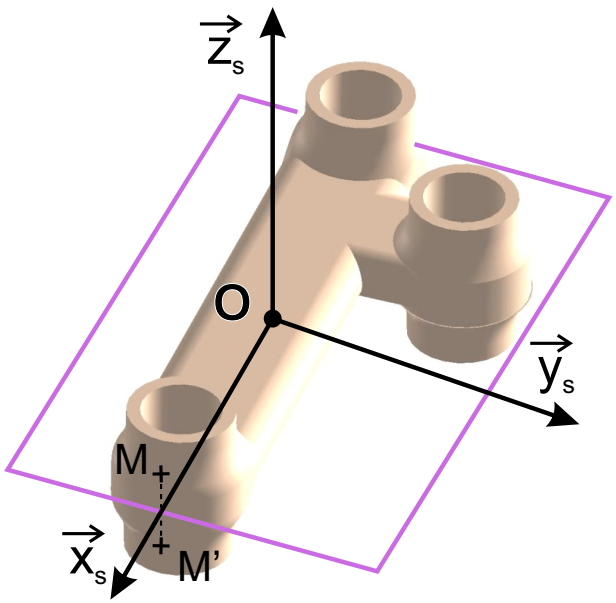
S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

$$D = \int_{M\in S} yz.dm = 0 \qquad E = \int_{M\in S} xz.dm = 0$$

2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

Un plan de symétrie matérielle



S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.

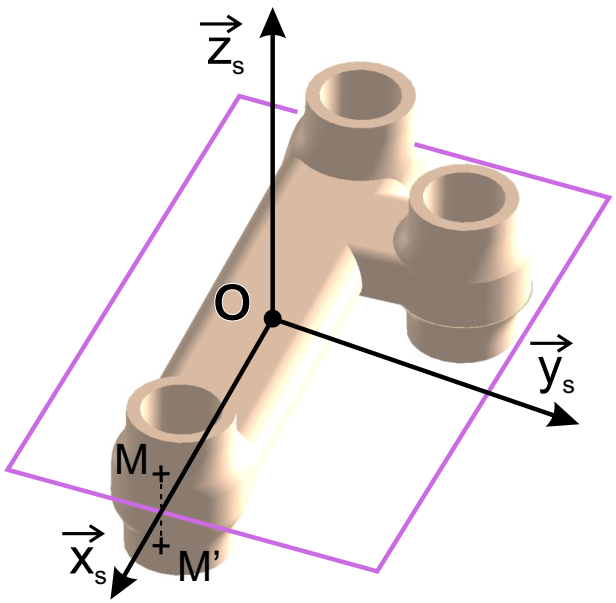
Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

$$D = \int_{M\in S} yz.dm = 0 \qquad E = \int_{M\in S} xz.dm = 0$$

Donc : $\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{-F} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-F} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$

2.1 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un plan de symétrie

Un plan de symétrie matérielle



S admet le plan de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$.

Soient M(x,y,z) et M'(x,y,-z) symétrique de M par rapport au plan alors :

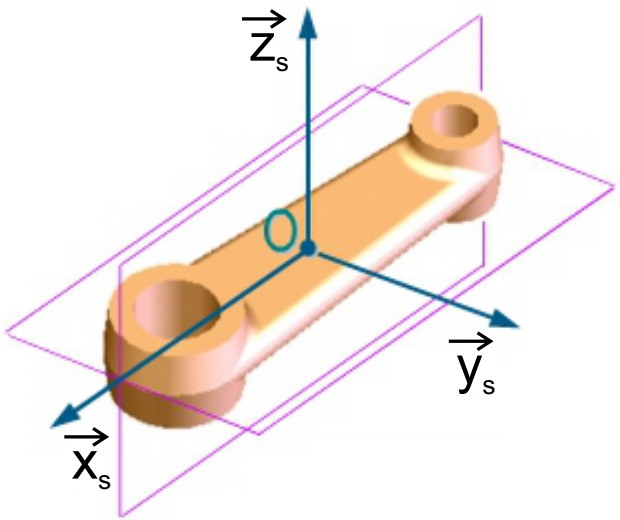
$$D = \int_{M\in S} yz.dm = 0 \qquad E = \int_{M\in S} xz.dm = 0$$

Donc : $\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{F} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$

C est moment principal d'inertie selon $(O,\vec{z}_s)$

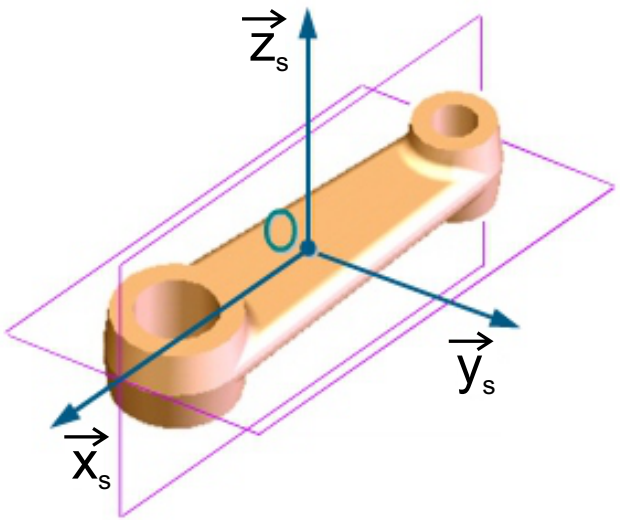
2.2 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant 2 plans de symétrie

2 plans de symétrie matérielle



2.2 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant 2 plans de symétrie

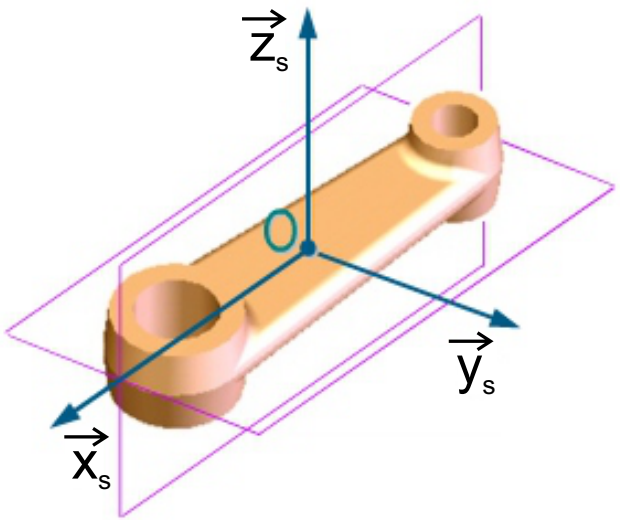
2 plans de symétrie matérielle



S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

2.2 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant 2 plans de symétrie

2 plans de symétrie matérielle



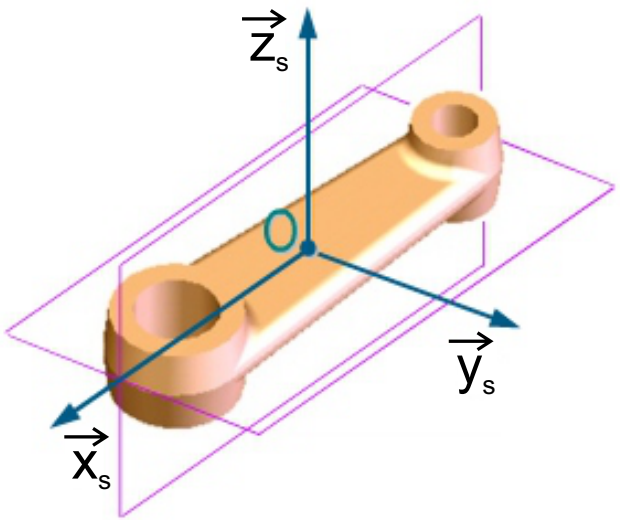
S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

$$\text{alors : } D = E = 0$$

$$\text{et } F = \int_{M \in S} xy.dm = 0$$

2.2 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant 2 plans de symétrie

2 plans de symétrie matérielle



S admet les plans de symétrie $(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$ et $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$,

$$\text{alors : } D = E = 0$$

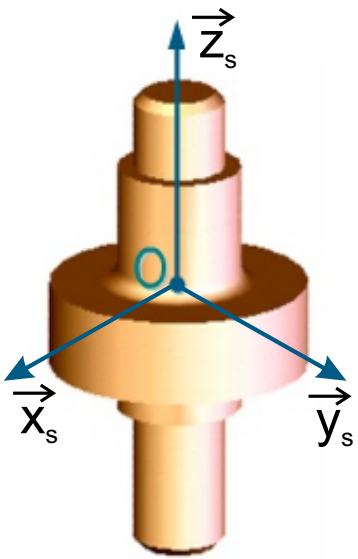
$$\text{et } F = \int_{M\in S} xy.dm = 0$$

Donc : $$\mathbf{I}(O,S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)}$$

A, **B** et **C** sont moments principaux d'inertie.

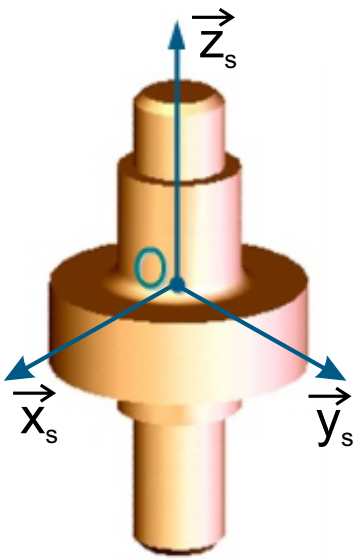
2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle



2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

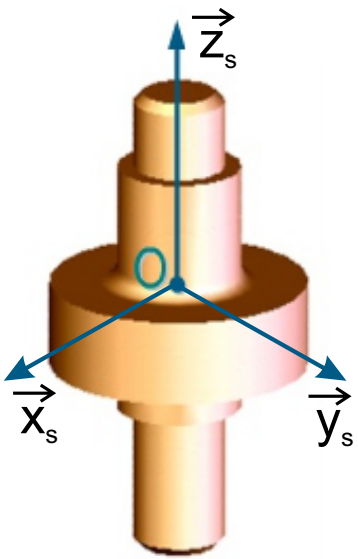
Axe de symétrie matérielle



S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle



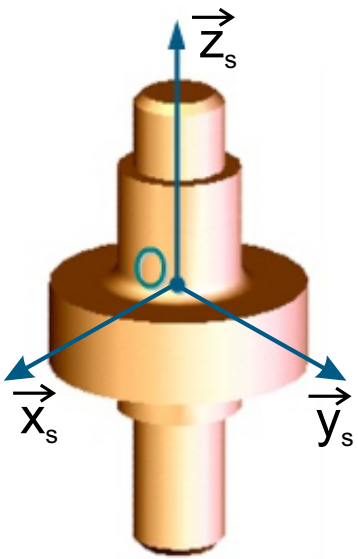
S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :

$$\mathbf{D = E = F = 0}$$

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle

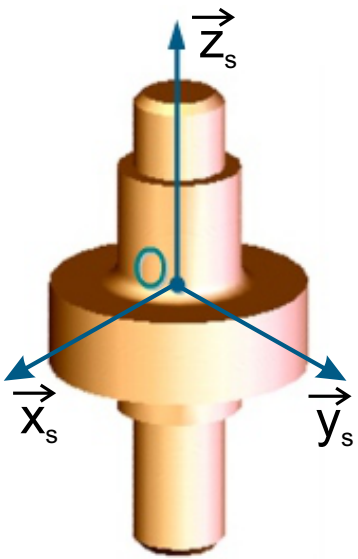


S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie : $\mathbf{D = E = F = 0}$
- x $\leftrightarrow$ y : $\mathbf{A = B}$

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle



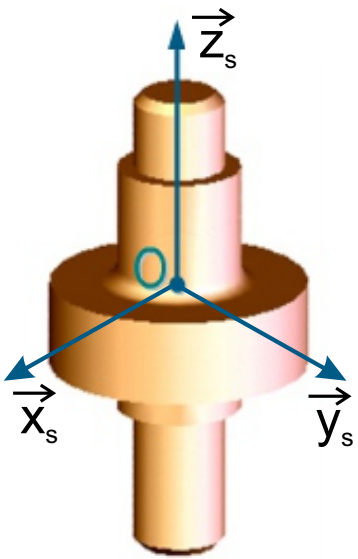
S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie :
$$\mathbf{D = E = F = 0}$$
- x $\leftrightarrow$ y :
$$\mathbf{A = B}$$

Donc : $\mathbf{I}(O,S)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z}_s)}$

2.3 Simplification en fonction des symétries matérielles : Solide possèdant un axe de symétrie

Axe de symétrie matérielle



S admet l'axe de symétrie $(O,\vec{z}_s)$ donc :

- $(O,\vec{x}_s,\vec{z}_s)$ et $(O,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ sont plans de symétrie : $\mathbf{D = E = F = 0}$
- x $\leftrightarrow$ y : $\mathbf{A = B}$

Donc : $$\mathbf{I}(O,S)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z}_s)}$$

$\boldsymbol{O,(-,-,\vec{z}_s)}$ indique que tout repère passant par O et contenant $\vec{z}_s$ est principal d'inertie, la matrice d'inertie est la même dans tous ces repères.