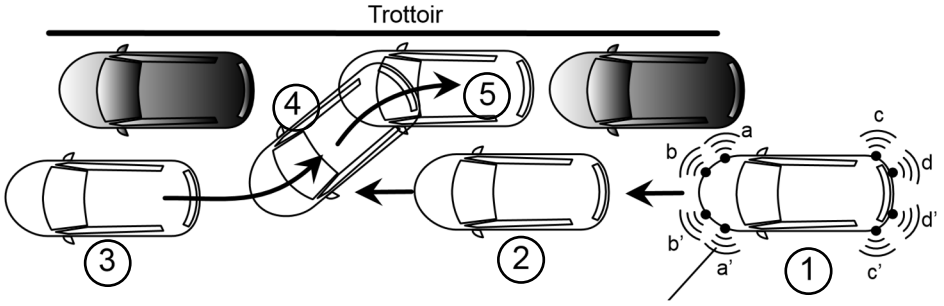
DS1 - Système de stationnement automatique
Centrale MP 2021 - Corrigé

II DETECTION DE L'ENVIRONNEMENT ET PREDICTION DE LA TRAJECTOIRE

II.A Détection et caractérisation d'une place libre

Question 1



Capteur à ultrasons (a, b, c, d, a', b', c' et d')

les capteurs à ultrasons a, c, b et d peuvent participer au respect de l'exigence 1.4 : identification d'une place libre (longueur/largeur).

Tous les capteurs peuvent participer à l'exigence 1.6.1 : détection de la présence d'obstacles.

Question 2

Entre les instants Ta et Tb, le véhicule a parcouru la distance $V_d(T_a - T_b) = V_d \Delta T_p = L$ qui correspond à la longueur de la place L.

Or l'exigence 1.4 précise : $L > L_v + 2 * 0{,}5$ d'où

$$\boxed{\Delta T_p > \frac{1 + L_v}{V_d}}$$

Question 3

En T_e l'onde émise par le capteur parcourt $2(D + e)$ à la vitesse de V_s : $2(D + e) = V_s T_e$ d'où $e = \frac{1}{2}(V_s T_e - \mathrm{D})$

D'après l'exigence 1.4 : $e > e_v + 0{,}15$

D'où $\frac{1}{2}(V_s T_e - \mathrm{D}) > e_v + 0{,}15$

$$\boxed{T_e > \frac{2(e_v + 0{,}15 + \mathrm{D})}{V_s}}$$

II.C Direction du véhicule

Question 4

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = \overrightarrow{V(F, V/R_1)} + \overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = R\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} + (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} - L_t \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_v}}$$

Ou en passant par O_1 :

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = \overrightarrow{V(O_1, V/R_1)} + \overrightarrow{CO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = \vec{0} + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FO_1}) \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v} + R \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v}$$

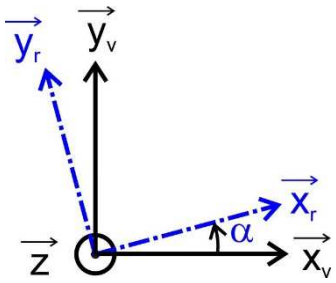
$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} - L_t \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_v}$$

Question 5

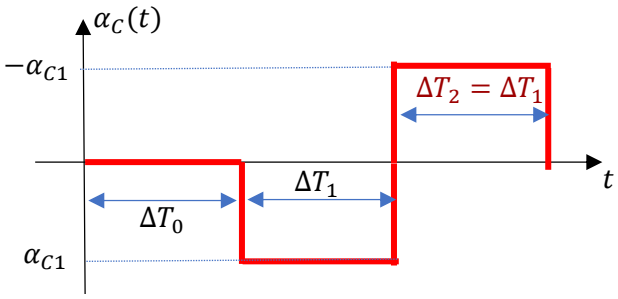
$$\overrightarrow{V(C,V/R_1)} = v \cdot \overrightarrow{x_r} = v \cdot (cos(\alpha) \cdot \overrightarrow{x_v} + sin(\alpha) \cdot \overrightarrow{y_v})$$

$$\begin{cases} v \cdot cos(\alpha) = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \\ v \cdot sin(\alpha) = -L_t\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

$$\boxed{tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{-L_t}{(R - e_t)}}$$



Question 6



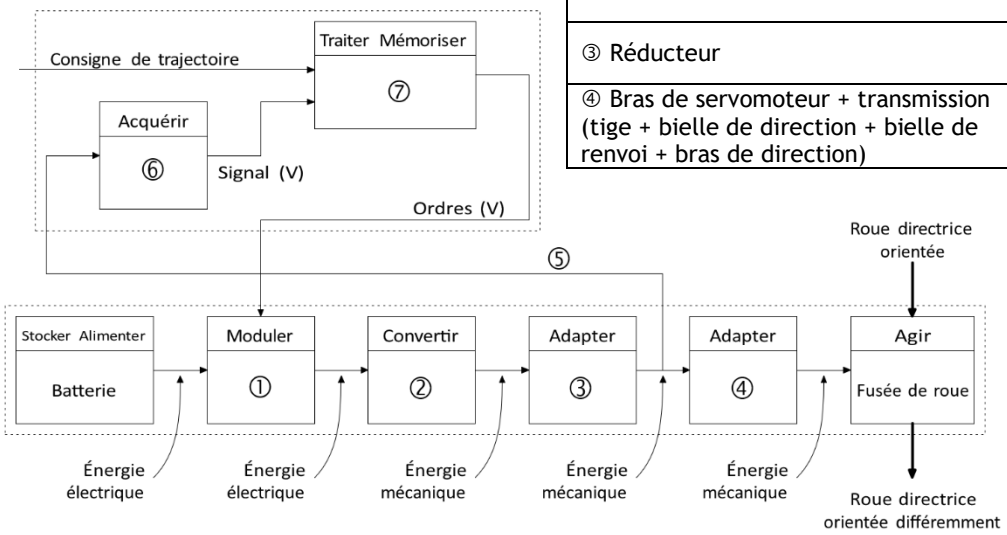
III MODELISATION DE LA COMMANDE DE DIRECTION ET VALIDATION DES PERFORMANCES

III.A Modélisation de la direction du véhicule radiocommandé

III.A.1 Etude structurelle de la direction du véhicule radiocommandé

Question 7

① Hacheur	⑤ Position angulaire de l'axe de sortie du réducteur à acquérir
② Moteur à courant continu	⑥ potentiomètre
③ Réducteur	⑦ microcontrôleur
④ Bras de servomoteur + transmission (tige + bielle de direction + bielle de renvoi + bras de direction)	



III.A.2 Commande angulaire des roues directrices

Question 8

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$$
$$l_1\overrightarrow{x_1}+b\overrightarrow{x_2}+(a-l_1)\overrightarrow{x_3}-a\vec{x}-b\vec{y}=\vec{0}$$
$$\begin{cases} sur\ \vec{x} : l_1\cdot\cos(\alpha_1)+b\cdot\cos(\alpha_2)+(a-l_1)\cdot\cos(\alpha_3)-a=0 \\ sur\ \vec{y} : l_1\cdot\sin(\alpha_1)+b\cdot\sin(\alpha_2)+(a-l_1)\cdot\sin(\alpha_3)-b=0 \end{cases}$$
$$\alpha_2=90°\ donc\ sur\vec{y}\ :\ l_1\cdot\sin(\alpha_1)+b+(a-l_1)\cdot\sin(\alpha_3)-b=0$$

$$\boxed{\sin(\alpha_3)=-\frac{l_1}{(a-l_1)}\sin(\alpha_1)}\ d'où\ \boxed{k=-\frac{l_1}{(a-l_1)}}$$

Question 9

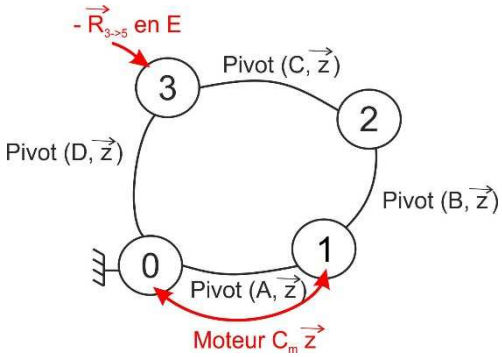
Pour α_3 variant de 0° à 40°, α_3 est une fonction linéaire de α_1 d'après la figure 15

$$\boxed{\alpha_3=K_{31}\alpha_1}\ avec\ K_{31}=\frac{-40-0}{30-0}\qquad \boxed{K_{31}=-\frac{4}{3}}$$

Question 10

On isole 2, BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures) :

- pivot $(B,\vec{z})$: $\{\tau_{1\to2}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$ ← 2D
- pivot $(C,\vec{z})$: $\{\tau_{3\to2}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to2}}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$ ← 2D



2 est à l'équilibre dans R0 galiléen sous l'action de 2 glisseurs en B et C donc $\overrightarrow{R_{1\to2}}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}=b.\overrightarrow{x_2}$.

On peut donc poser $\boxed{\overrightarrow{R_{1\to2}}=X_{12}\vec{x}_2}$

Démo :

On applique le TMS en C : $\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{R_{1\to2}}+\vec{0}=\vec{0}\Leftrightarrow -b.\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{R_{1\to2}}=\vec{0}$ $\quad$ **$\overrightarrow{R_{1\to2}}$ colinéaire à $\overrightarrow{x_2}$**

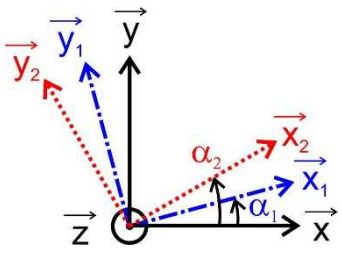
Question 11

On isole 1, BAME :

- pivot $(B,\vec{z})$: $\{\tau_{2\to1}\}=-\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}}=X_{12}\vec{x}_2\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$ ← 2D
- pivot $(A,\vec{z})$: $\{\tau_{0\to1}\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{0\to1}}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$ ← 2D
- Moteur : $\{\tau_{moteur\to1}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_m\vec{z}\end{matrix}\right\}_{\forall P}$

1 est à l'équilibre dans R0 galiléen, on applique le TMS en A projeté sur $\vec{z}$ pour ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison 0-1 pivot $(A,\vec{z})$:

$$\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\ell_1\overrightarrow{x_1}}\wedge(-X_{12}\vec{x}_2)\right)\cdot\vec{z}+\mathrm{C_m}=0$$



Avec $(\vec{x}_1\wedge\vec{x}_2)\cdot\vec{z}=(\vec{z}\wedge\vec{x}_1)\cdot\vec{x}_2=\vec{y}_1\cdot\vec{x}_2=\sin(\alpha_2-\alpha_1)$:

$$-\ell_1X_{12}\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\mathrm{C_m}=0\qquad \boxed{X_{12}=\frac{\mathrm{C_m}}{\ell_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)}}$$

Question 12

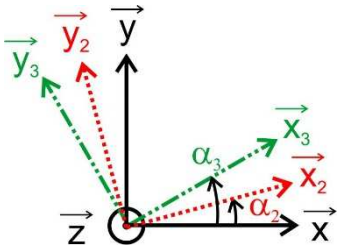
On isole {2+3}, BAME :

- pivot $(B,\vec{z})$: $\{\tau_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}} = X_{12}\vec{x}_2 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$ ↑ 2D
- pivot $(D,\vec{z})$: $\{\tau_{0\to3}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{0\to3}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_D$ ↑ 2D
- Action de 5 sur 3 en E : $\{\tau_{5\to3}\} = -\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{3\to5}} = X_{35}\vec{x}_3 + Y_{35}\vec{y}_3 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_E$

{2+3} est à l'équilibre dans R0 galiléen, on applique le TMS en D projeté sur $\vec{z}$ pour ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison 0-3 pivot $(D,\vec{z})$:

$$\left(\underbrace{\overrightarrow{DB}}_{-(b\,\overrightarrow{x_2}+(a-\ell_1)\overrightarrow{x_3})} \wedge X_{12}\vec{x}_2\right)\cdot\vec{z} + \left(\underbrace{\overrightarrow{DE}}_{\ell_3\,\overrightarrow{y_3}} \wedge -(X_{35}\vec{x}_3 + Y_{35}\vec{y}_3)\right)\cdot\vec{z} = 0$$

$$-(a-\ell_1)X_{12}(\overrightarrow{x_3}\wedge\vec{x}_2)\cdot\vec{z} + \ell_3 X_{35} = 0$$



Avec $(\overrightarrow{x_3}\wedge\vec{x}_2)\cdot\vec{z} = (\vec{z}\wedge\vec{x}_3)\cdot\vec{x}_2 = \vec{y}_3\cdot\vec{x}_2 = -\sin(\alpha_3-\alpha_2)$:

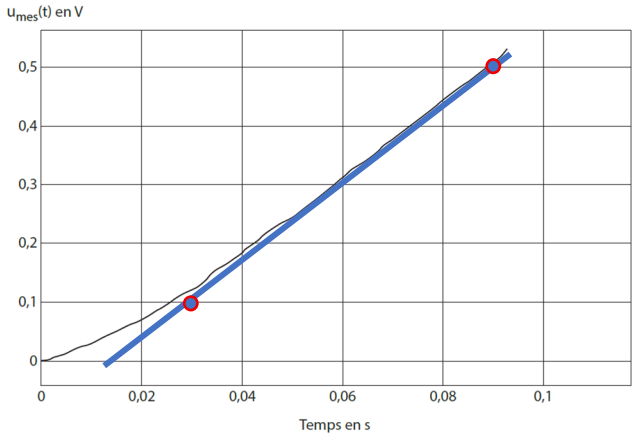
$$(a-\ell_1)X_{12}\sin(\alpha_3-\alpha_2) + \ell_3 X_{35} = 0$$

$$X_{35} = -\frac{(a-\ell_1)X_{12}\sin(\alpha_3-\alpha_2)}{\ell_3} \; soit \; \boxed{X_{35} = -\frac{(a-\ell_1)\sin(\alpha_3-\alpha_2)}{\ell_3\ell_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\mathrm{C_m}}$$

Question 13

- On trace sur la figure 17, l'asymptote quand $t\to+\infty$. Son équation est alors donnée par

$$u_\infty(t) = K_m K_c K_r u_0 (t-\tau_m)$$



On en déduit du tracé la pente :

$$K_m K_c K_r u_0 = \frac{0{,}5-0{,}1}{0{,}09-0{,}03} = \frac{20}{3}$$

$$K_m = \frac{20}{3}\times\frac{1}{K_c K_r u_0} = \frac{20}{3}\times\frac{120}{1{,}05\times3}$$

$$\boxed{K_\mathrm{m} = 254\; rad.s^{-1}\cdot V^{-1}}$$

- L'asymptote coupe l'axe des abscisses en $t-\tau_m$. On peut simplement lire au point d'intersection :

$$\boxed{\tau_m = 0{,}012\; s}$$

Question 14

$$H_m(p) = \frac{K_m}{1+\tau_m p} \;\text{ avec }\; K_m = \frac{1}{k_e} \text{ et } \tau_m = \frac{RJ_m}{k_e^2}.$$

- $\boxed{K_e = \frac{1}{K_m} = 0{,}00394\; V\cdot s\cdot rad^{-1}}$
- $\tau_m = \frac{RJ_m}{K_e{}^2}$ d'où $\boxed{RJ_m = \tau_m K_e^2 = 1{,}86\cdot10^{-7}\Omega.kg.m^2}$

Question 15

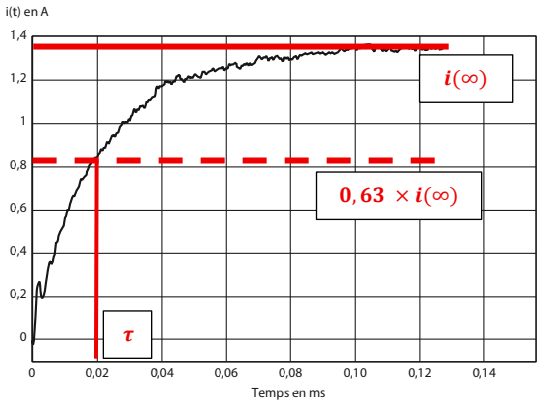
Rotor est bloqué c'est à dire $\omega_m(t) = 0$ donc (III.3) $e(t) = 0$. Ainsi l'équation électrique du moteur s'écrit

$$LpI(p) + RI(p) = U_m(p)$$

$$\boxed{\frac{I(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{R + Lp} = \frac{1/R}{1 + \frac{L}{R}p}}$$

Question 16

$\frac{I(p)}{U_m(p)}$ est une fonction de transfert du 1er ordre, ce qui est cohérent avec la courbe de i(t) en réponse à un échelon de tension $u_m(t) = 3\,V$: allure exponentielle, tangente à l'origine de pente non nulle.



- On identifie K en régime permanent : $K = \frac{i(\infty)}{u_0} = \frac{1{,}35}{3} = \frac{1}{R}$ d'où $\boxed{R = 2{,}22\ \Omega}$
- La constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ se lit comme l'abscisse lorsque $i(\tau) = 0{,}63 \times i(\infty)$

$$\boldsymbol{\tau = 0{,}02\ ms}\ \text{d'où}\ \mathrm{L} = \mathrm{R}\tau = 2{,}22 \times 0{,}02 \cdot 10^{-3} \qquad \boxed{\mathrm{L} = 44{,}4 \cdot 10^{-6}\ H}$$

- D'après la question 14 : $RJ_m = \tau_m K_e^2 = 3{,}2 \cdot 10^{-7}\Omega.kg.m^2$, on en déduit $J_m = \frac{1{,}86 \cdot 10^{-7}}{R} = \frac{1{,}86 \cdot 10^{-7}}{2{,}22}$

$$\boxed{J_m = 8{,}47.10^{-8}\ kg.m^2}$$

III.A.3 Modèle global et performances de la commande sans correction

Question 17

Un système asservi de qualité (bon fonctionnement du comparateur) lorsque : $\varepsilon(t) = 0$ quand $\alpha(t) = \alpha_C(t)$

$$\varepsilon(p) = U_C(p) - U_{mes}(p) = \frac{K_a}{H_t(p)}\alpha_C(p) - \frac{K_c}{H_t(p)}\alpha(p)$$

$\varepsilon(p) = 0$ quand $\boxed{K_a = K_C}$

Question 18

$$H(p) = \frac{A(p)}{A_C(p)} = \frac{1}{H_t(p)} K_a H_t(p) \frac{C(p)H_m(p)K_r H_i(p).1/p}{1 + C(p)H_m(p)K_r H_i(p).K_c.1/p} = \frac{K_a K_r K_m}{p(1 + \tau_m p) + K_c K_r K_m}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_c K_r K_m}p + \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m}p^2}}\ H(p)\ est\ d'ordre\ 2 \qquad \boldsymbol{\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

Par identification :

- Gain statique : $\boxed{K = 1}$
- Pulsation propre :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2} = \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m}\ d'où\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_r K_m}{\tau_m}}} = \sqrt{\frac{256 \times \frac{1}{120} \times 1{,}05}{0{,}03}} \qquad \boxed{\omega_0 = 8{,}64\ rad/s}$$

- Coefficient d'amortissement :

$$\frac{2z}{\omega_0} = \frac{1}{K_c K_r K_m}\ d'où\ \boxed{z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau_m K_c K_r K_m}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}03 \times 256 \times \frac{1}{120} \times 1{,}05}} \qquad \boxed{z = 1{,}93}$$

Question 19

Les performances attendues en précision et amortissement sont données dans le tableau 2 :

Performance	Critère/Niveau	Modèle théorique de la commande des roues	Conclusion
Précision angulaire	Erreur Ers = 0 pour une entrée en échelon	Le gain statique de la fonction en boucle fermée H(p) du 2nd ordre vaut K = 1 donc Ers = 0. Ou la classe du système (nombre d'intégrateur dans la FTBO) vaut 1 donc Ers = 0.	la performance de précision angulaire est respectée
Stabilité	Aucun dépassement	$z = 1{,}93 > 1$ il n'y a pas de dépassement.	la performance de stabilité est respectée

Question 20

La courbe du modèle théorique est quasiment confondue avec celle du modèle expérimental donc le modèle théorique est validé.

D'autre par la performance attendue en rapidité est donnée dans le tableau 2 :

Performance	Critère/Niveau	Modèle théorique de la commande des roues	Conclusion
Rapidité	Temps de réponse à 5% : $tr_{5\%} \leqslant 0{,}4$ s	On lit sur la Figure 19 : $t_{5\%} = 1{,}13\ s > 0{,}4\ s$	la performance de rapidité n'est pas respectée.

IV AMELIORATION DES PERFORMANCES – CHOIX D'UNE CORRECTION DE LA COMMANDE

IV.A. Amélioration et correction du modèle de l'asservissement en position des roues

Question 21

$$H(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{K_P K}{K_P K + p(1 + \tau p)} \qquad \boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_P K}p + \frac{\tau}{K_P K}p^2}}$$

Par identification :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_P K}{\tau}}} \quad , \quad \boxed{z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau K K_P}}}$$

On souhaite une commande la plus rapide possible sans dépassement => $\boxed{z = 1}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau K K_P}} = 1 \Rightarrow \boxed{K_P = \frac{1}{4\tau K}} = \frac{1}{4 \times 0{,}015 \times 2{,}2} \qquad \boxed{K_P = 7{,}58\ V/rad}$$

Question 22

Performance	Critère/Niveau	Modèle théorique de la commande des roues corrigée	Conclusion
Précision angulaire	Erreur Ers = 0 pour une entrée en échelon	$\alpha_\infty = \frac{\pi}{4}$ pour une consigne $\alpha_c = \frac{\pi}{4}$ $Ers = 0$	la performance de précision angulaire est respectée
Rapidité	Temps de réponse à 5% : $tr_{5\%} \leqslant 0{,}4$ s	On lit sur la Figure 21 : $t_{5\%} = 0{,}26\ s < 0{,}4\ s$	la performance de rapidité est respectée
Stabilité	Aucun dépassement	il n'y a pas de dépassement	la performance de stabilité est respectée

Toutes les performances du cahier des charges sont respectées pour le modèle de commande des roues du véhicule RC corrigée.

IV.B. Performances dans le domaine réel et amélioration de la correction

Question 23

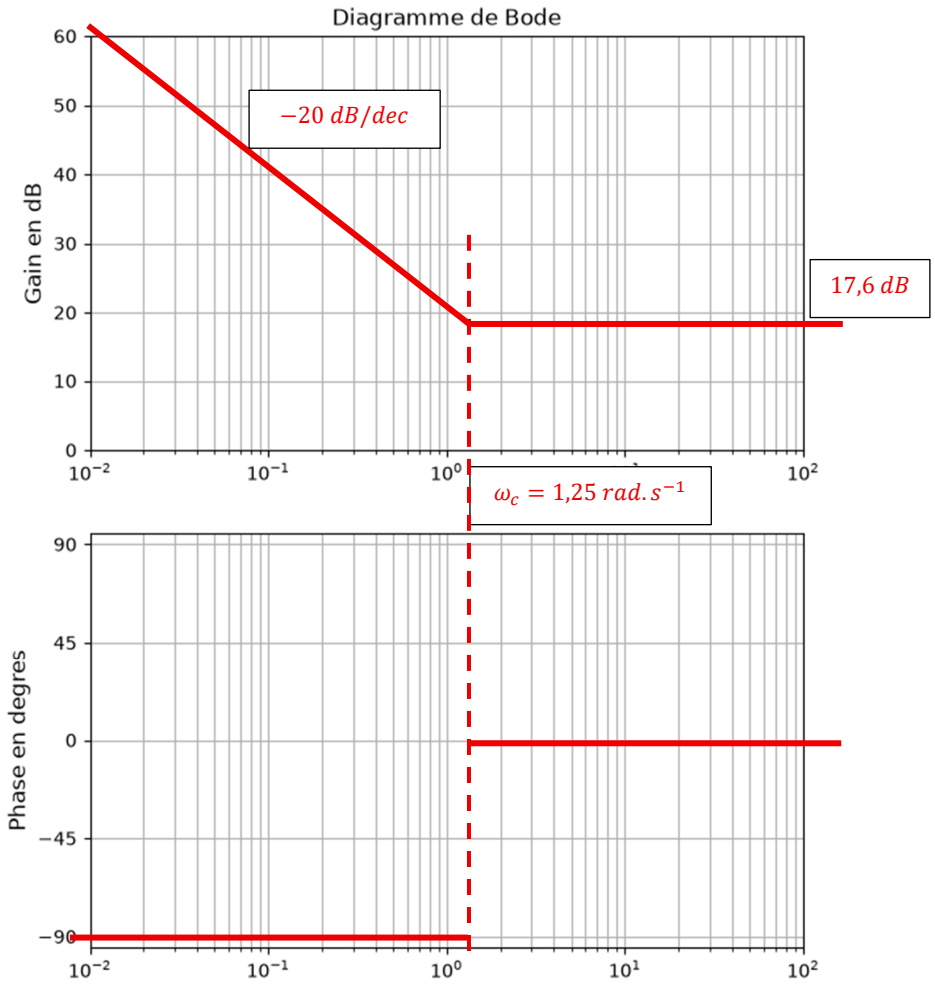
Sur la figure 22, la courbe $\alpha(t)$ voiture sur le sol présente une erreur statique non nulle donc la performance de précision angulaire n'est plus respectée pour le véhicule sur le sol. Cela peut s'expliquer par la présence de frottements secs entre les roues et le sol.

Question 24

Diagrammes de Bode asymptotiques du Correcteur $C(p) = \frac{K_p}{T_i.p}(1 + T_i.p) = \frac{7{,}6}{0{,}8.p}(1 + 0{,}8.p)$

$$\omega_c = \frac{1}{Ti} = 1{,}25\ rad.s^{-1}$$

en régime établi on pose $p = j.\omega$	$\omega \ll \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$C(\omega) = \frac{K_p}{T_i.j.\omega}(1 + T_i.j.\omega)$	$C(\omega) \approx \frac{K_p}{T_i.j.\omega} = -\frac{K_p}{T_i.\omega}j$	$C(\omega) \approx \frac{K_p}{T_i.j.\omega}T_i.j.\omega = K_p$
$G_{dB}(\omega)$	$G_{dB}(\omega) \approx 20.\log\left(\frac{K_p}{T_i.\omega}\right)$ $G_{dB}(\omega) \approx 20.\log\left(\frac{K_p}{T_i}\right) - 20.\log(\omega)$ Pente -20 dB/dec	$G_{dB}(\omega) \approx 20.\log(K_p)$ $G_{dB}(\omega) \approx 20.\log(7{,}6) = 17{,}6\ dB$
$\varphi(\omega)$	$-90°$	$0°$



Question 25

Performance	Critère/Niveau	Mesure (figure 24)	Conclusion
Précision angulaire	Erreur Ers = 0 pour une entrée en échelon	$\alpha_\infty = \frac{\pi}{4}$ pour une consigne $\alpha_c = \frac{\pi}{4}$ $Ers = 0$	la performance de précision angulaire est respectée
Rapidité	Temps de réponse à 5% : $tr_{5\%} \leqslant$ 0,4 s	On lit $t_{5\%} = 0{,}3\ s < 0{,}4\ s$	la performance de rapidité est respectée
Stabilité	Aucun dépassement	il n'y a pas de dépassement	la performance de stabilité est respectée

Toutes les performances du cahier des charges sont respectées lors de l'essai avec le véhicule RC posé et à l'arrêt (avec le correcteur proportionnel intégral).

Question 26

Dans la réalité le braquage et le contre-braquage ne sont ni instantanés, ni effectués véhicule à l'arrêt. La consigne d'angle $\alpha_C(t)$ en échelon pur ne peut être respectée, la variation de $\alpha(t)$ ne peut pas être instantanée. D'où l'écart entre la trajectoire réelle du véhicule et la trajectoire théorique.