

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

I. Rappel sur la dérivée d'une fonction d'une variable

Considérons une fonction f de la variable x dérivable : $f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \right) = \frac{df}{dx}$

Différentielle d'une fonction f d'une seule variable :

$$df = f'(x)dx$$

II. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

1) Définition

Soit f fonction des variables x et y .

Considérons d'abord que y reste constant ; f ne dépend plus que de la variable x et la variation de f correspondant à une variation dx de la variable x est : $df_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est **la dérivée partielle de f par rapport à x** , c'est-à-dire la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à la variable x quand l'autre variable est prise constante.

De même, supposons maintenant que x reste constant : f ne dépend plus que de y et la variation de f correspondant à une variation dy de la variable y est : $df_y = \frac{\partial f}{\partial y} dy$ où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est **la dérivée partielle de f par rapport à y** .

Maintenant, si x varie de dx et simultanément y varie de dy , on somme les deux contributions pour avoir la variation totale de f correspondante :

$$df = df_x + df_y$$

Soit encore : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Différentielle d'une fonction f de n variables :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Attention cependant en calculant les dérivées partielles : Considérons par exemple l'entropie d'un gaz parfait ; elle peut s'écrire en fonction des variables (T, V) ou en fonction des variables (T, P) :

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T V^{\gamma-1}) + cste$$

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma P^{1-\gamma}) + cste$$

Dans le premier cas,

Dans le second cas,

Les deux dérivées sont distinctes ! Il faudra être plus précis et signaler avec quelles variables on travaille : Ainsi pour le premier cas, S est fonction de T et V , on dérive S par rapport à T en gardant la seconde variable constante, celle-ci étant V dans le premier exemple et P dans le second :

donc

Rappels :

- En physique la notation d est utilisée pour noter les différentielles des fonctions. Par exemple, en Thermodynamique, dU est la différentielle de la fonction $U(V, T)$ qui représente l'énergie interne.

La notation dU peut aussi être interprétée comme représentant une petite variation d'énergie interne entre deux états d'équilibre thermodynamique voisins.

- La notation Δ est utilisée pour noter la différence entre deux valeurs d'une fonction, donc pour une variation macroscopique.

Ainsi :

$$\Delta U = \int_{1 \rightarrow 2} dU = U_2 - U_1$$

Notez que cette variation dépend de la valeur de U dans les états 1 et 2 et non de la transformation allant de l'un à l'autre.

- La notation δ est utilisée pour noter une petite quantité d'une grandeur qui n'est pas la différentielle d'une fonction. Cette notation est utilisée par exemple pour noter un travail élémentaire δW ou un transfert thermique élémentaire δQ .

Pour une transformation donnée, entre deux états d'équilibre d'un système thermodynamique, le travail et les échanges thermiques dépendent de la transformation suivie par le système :

$$W = \int_{1 \rightarrow 2} \delta W$$
$$Q = \int_{1 \rightarrow 2} \delta Q$$

2) Théorème de Schwartz

Théorème de Schwartz : Soit f une fonction de deux variables réelles x et y , si les dérivées partielles de f existent et sont continues en x et y , alors la dérivée partielle à l'ordre deux de f ne dépend pas de l'ordre de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Ce théorème s'applique aussi aux fonctions de plus de deux variables.

Exemple 1 : $f(x, y) = x^2 y$

Exemple 2 : $P = \frac{nRT}{V}$