Fiche Outil 20

Analyse vectorielle

Dans tout le chapitre, les repères de coordonnées cartésiennes (x,y,z), cylindriques (r,θ,z), sphériques (r,θ,ϕ), sont supposés orthonormaux, de bases respectives $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\phi)$.

I. Champ

1) Définitions

Champ scalaire : fonction scalaire $f(M,t)$ définie dans un domaine *D*, qui associe à M une valeur scalaire.

Exemples : En physique, on utilise le champ de température $T(M)$ de densité de charges $\rho(M)$, de masse volumique, d'énergie potentielle $EP(M)$, de potentiel électrostatique $V(M)$, …

Champ vectoriel : fonction vectorielle $\vec{a}(M,t)$ définie dans un domaine *D*, qui associe donc à tout point M un vecteur.

En physique, on utilise le champ de pesanteur, le champ électrique $\vec{E}(M)$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$,, le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$,,…

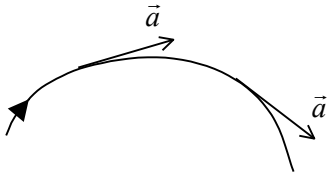
Un champ est dit :

- **uniforme s'il est indépendant de la position *M*,**
- **stationnaire s'il est indépendant du temps *t*.**

2) Ligne et tube de champ d'un champ vectoriel

Définition : On appelle ligne de champ d'un champ vectoriel $\vec{a}$ toute courbe telle qu'en chacun de ses points *M*, $\vec{a}(M)$ lui soit tangent :

$$\vec{a}(M) \wedge \overrightarrow{d\ell} \ \vec{0}$$



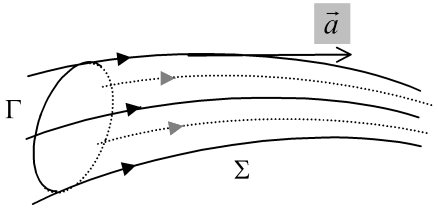
Equation

L'équation différentielle d'une ligne de champ s'écrit :

- En coordonnées cartésiennes $\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$
- En coordonnées polaires $\frac{dr}{a_r}=\frac{rd\theta}{a_\theta}$

Définition : Un tube de champ est la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour donné.

Nous serons conduits à distinguer par la suite, la section (éventuelle ment droite) du tube de champ, et sa surface latérale.



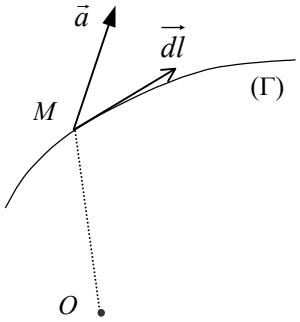
3) Circulation d'un champ de vecteurs

Définition: (Γ) étant un contour orienté quelconque, on appelle circulation de *A* à *B* le long de (Γ) du champ $\vec{a}$ l'intégrale curviligne calculée le long du contour (Γ) :

$$\mathcal{C}_{A\to B} = \int_{A\to B} \vec{a}.\overrightarrow{d\ell}$$

Si le contour (Γ) est fermé, on note :

$$\mathcal{C}_{\Gamma} = \oint \vec{a}.\overrightarrow{d\ell}$$



Exemples :
• le travail W est la circulation d'une force F le long d'un trajet
• la différence de potentiel U est la circulation du champ électrique E le long d'un trajet

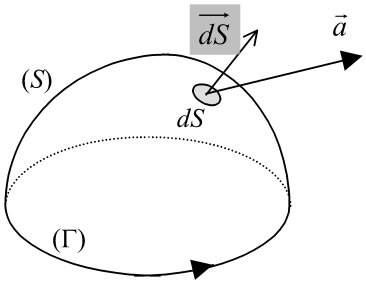
4) Flux d'un champ de vecteur

Définition : (Γ) étant un contour orienté quelconque et *S* une surface s'appuyant sur (Γ) et orientée par (Γ), on appelle flux de $\vec{a}$ à travers *S* l'intégrale de surface calculée sur *S* :

$$\Phi_S = \iint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS}$$

Si la surface *S* est fermée, elle sera par convention orientée vers l'extérieur et on notera :

$$\Phi_S = \oiint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS}$$



Exemple : flux du champ magnétique à travers une surface.

II. Opérateur gradient

1) Définition

Le gradient d'une fonction scalaire *f* est défini en tout point *M* par :

$$df = \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{d\ell}$$

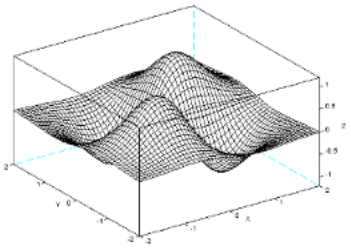
Le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle f possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.
Il pointe des valeurs basses vers les valeurs hautes.

Pour une variation macroscopique entre deux positions A et B :

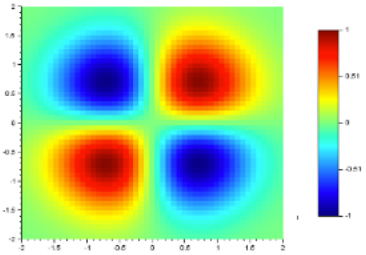
$$f(B) - f(A) = \int_{A\to B} \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{d\ell}$$

Exemple : champ scalaire *f* défini par: $f(x,y) = yxe^{-(x^2+y^2)}$

vue 3D



vue de dessus



2) Expressions

En coordonnées cartésiennes : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

En coordonnées cylindriques : $df = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}d\mathrm{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,rd\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

En coordonnées sphériques : $df = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}d\mathrm{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$

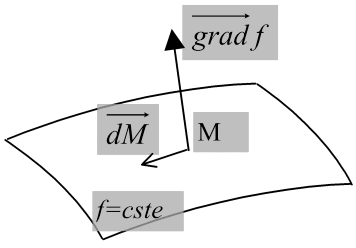
$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}d\mathrm{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,d\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi}$$

Dans le cas particulier où *f* est à symétrie sphérique et donc ne dépend que de *r* :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{df}{dr}\vec{u}_r$$

3) Surfaces de niveau



Définition : Une surface de niveau est toute surface où *f* garde une valeur constante.

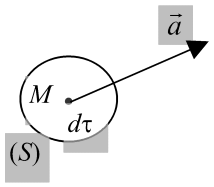
Propriété : Pour un déplacement élémentaire quelconque $\overrightarrow{d\ell}$ contenu dans une surface de niveau, on a $df = 0$ et donc :

$$df = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{d\ell} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}(f) \perp \overrightarrow{d\ell}$$

Le vecteur gradient est donc normal aux surfaces de niveau.
Il est dirigé suivant les valeurs croissantes de *f* et indique la direction dans laquelle, à partir d'un point *M*, *f* augmente le plus rapidement.

III. Divergence

1) Définition



Définition : Soit $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel. Si $d\tau$ est l'élément de volume contenant un point M, et $d\Phi$ représente le flux de $\vec{a}(M)$ à travers la surface S limitant $d\tau$, la divergence de $\vec{a}$ en M est le flux de $\vec{a}$ à travers la petite surface entourant le volume élémentaire $d\tau$ au niveau du point M par unité de volume.

$$div(\vec{a}) = \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\oiint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS}}{d\tau}$$

Expressions

- En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{div(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}}$$

- En coordonnées cylindriques :

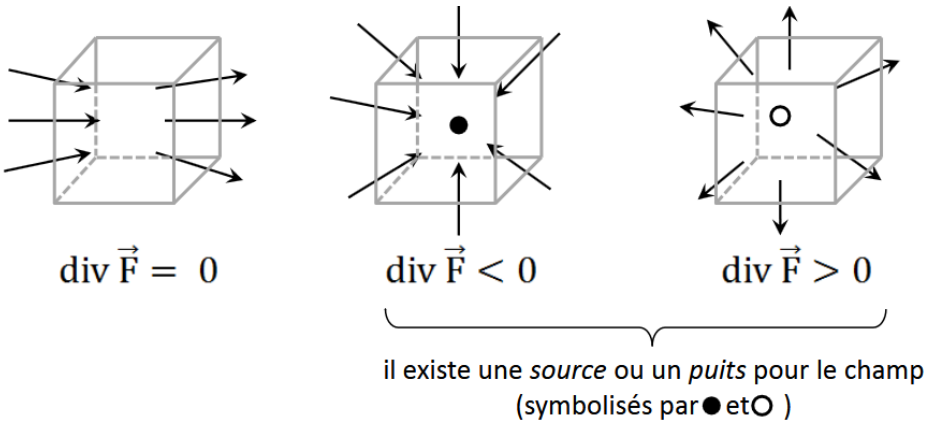
$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r a_r)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques, dans le cas particulier ou $\vec{a}(M)$ est radial à symétrie sphérique $\vec{a}(r)$:

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r}\right]$$

Seule l'expression en coordonnées cartésiennes est à connaître. Les autres expressions seront données si elles sont nécessaires.

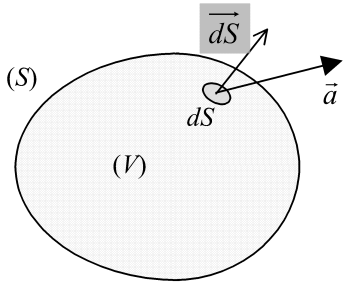
La divergence traduit le fait que le champ peut diverger ou converger vers un point,sa divergence sera alors non nulle, tandis que s'il ne diverge ou converge, sa divergence sera nulle.



2) Théorème de Green-Ostrogradski

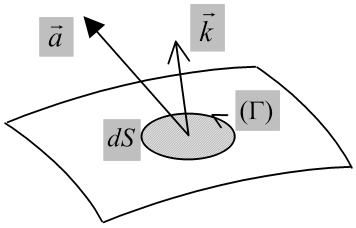
Théorème de Green-Ostrogradski : Soit S une surface fermée limitant un volume V. Pour tout champ vectoriel $\vec{a}$, le flux du champ à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale sur tout le volume V limité par S de la divergence de $\vec{a}$:

$$\oiint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div(\vec{a})\, d\tau$$



IV. Rotationnel

1) Définition



Soit $\vec{a}$ un champ vectoriel. Si (Γ) est un contour orienté de vecteur surface $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{k}$ entourant un point M, et dC représente la circulation de $\vec{a}$ le long de (Γ), par définition la projection du **rotationnel de $\vec{a}$** sur un axe représente localement (au voisinage de M), la circulation de $\vec{a}$ par unité de surface autour de cet axe.

$$\vec{k}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \frac{\oint \vec{a}\,.\,\overrightarrow{d\ell}}{dS}$$

Expressions :

- en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{a}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- en coordonnées cylindriques :

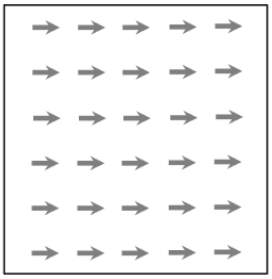
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

- en coordonnées sphériques :

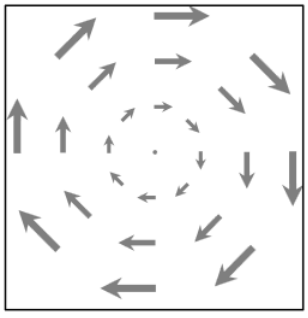
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial(F_\varphi r \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(F_\varphi r \sin\theta)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

Seule l'expression en coordonnées cartésiennes est à connaître. Les autres expressions seront données si elles sont nécessaires.

Le rotationnel traduit le fait que le vecteur $\vec{a}$ peut tourner autour de certains points :



$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ - champ « irrotationnel »



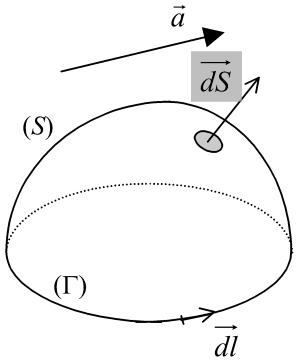
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} \neq \vec{0}$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

2) Théorème de Stokes

Théorème de Stokes : Soit (Γ) un contour orienté quelconque et *S* une surface s'appuyant sur (Γ) et orientée, pour tout champ vectoriel $\vec{a}$ la circulation de de champ le long du contour fermé (Γ) est égale au flux à travers *S* du rotationnel de $\vec{a}$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a}.\overrightarrow{d\ell} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{dS}$$



V. Laplacien

1) Laplacien scalaire

Définition : Le laplacien d'un champ scalaire f(M) est défini par :

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}(f))$$

Expressions

- En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En cordonnées cylindriques **:**

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordonnées sphériques, dans le cas où la fonction *f* possède la symétrie sphérique $f(r)$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)\right]$$

2) Laplacien vectoriel

Définition : Le laplacien vectoriel du champ de vecteur $\vec{a}$ est l'opérateur du second ordre défini par :

$$\Delta\,\vec{a} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{a})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,(\vec{a}))$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta\,\vec{a} = \Delta a_x\,\vec{u}_x + \Delta a_y\,\vec{u}_y + \Delta a_z\,\vec{u}_z$$

VI. Propriétés des opérateurs

Tous les opérateurs étudiés sont linéaires, par exemple :

$$\overrightarrow{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\overrightarrow{grad}(f) + \mu\,\overrightarrow{grad}(g)$$

$$div(\overrightarrow{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{0}$$

$$div(\overrightarrow{rot}(\vec{a})) = 0$$

$$\Delta\,\vec{a} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{a})) \; - \; \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{a})\right)$$

Propriété : Si $\vec{a}$ a un rotationnel nul, alors il existe au moins un champ scalaire f dont $\vec{a}$ est le gradient :

$$\overrightarrow{rot}(\,\vec{a}\,) = \vec{0} \Leftrightarrow \; \exists f \; tel \; que \; \vec{a} = \overrightarrow{grad}(f)$$

Propriété : Si $\vec{a}$ a une divergence nulle, alors il existe au moins un champ vectoriel $\vec{b}$ dont $\vec{a}$ est le rotationnel :

$$div(\,\vec{a}\,) = 0 \Leftrightarrow \; \exists\, \vec{b} \; tel \; que \; \vec{a} = \overrightarrow{rot}(\vec{b})$$

Propriété :

$$div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = -\vec{A}.\overrightarrow{rot}(\vec{B}) + \vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{A})$$