L'équation différentielle de l'oscillateur amorti
Document de cours

Nous donnons ci-dessous toutes les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti. Il s'agit d'une équation très courante en physique qui s'écrit :

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{y} + \omega_0^2\, y = 0}$$

où $\omega_0 > 0$ est la *pulsation propre* et $Q > 0$ est le *facteur de qualité*.

Remarque :

On peut aussi introduire le *coefficient d'amortissement* m, défini par :

$$\boxed{2m = \frac{1}{Q} \quad \text{donc} \quad \ddot{y} + 2m\omega_0\,\dot{y} + \omega_0^2\, y = 0}$$

La nature des solutions dépend des racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, r + \omega_0^2 = 0$$

Ces racines dépendent elles-mêmes du signe du discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\,\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

1) $Q < 1/2$: **régime apériodique**.

$\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles qui sont :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1}$$

En posant :

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{2Q^2} - 1} \quad \textit{pseudo-pulsation}$$

les deux racines s'écrivent :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega$$

La solution générale est de la forme :

$$\boxed{y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left\{Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right\}}$$

où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Une autre forme très utile de la solution s'obtient en introduisant les cosinus et sinus hyperboliques, c'est à dire :

$$\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

et donc :

$$e^{\omega t} = \mathrm{ch}(\omega t) + \mathrm{sh}(\omega t) \quad \text{et} \quad e^{-\omega t} = \mathrm{ch}(\omega t) - \mathrm{sh}(\omega t)$$

On obtient :

$$y(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left\{(A+B)\,\mathrm{ch}(\omega t) + (A-B)\,\mathrm{sh}(\omega t)\right\}$$

et donc, en définissant deux nouvelles constantes $a = A + B$ et $b = A - B$, nous obtenons :

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left\{a\,\mathrm{ch}(\omega t) + b\,\mathrm{sh}(\omega t)\right\}}$$

2) $Q = 1/2$: **régime critique**.

$\Delta = 0$ et il y a une racine double $r_0 = -\,\omega_0$. La solution est de la forme :

$$\boxed{y(t) = e^{-\omega_0 t}(a + bt)}$$

3) $Q > 1/2$: **régime pseudo-périodique**.

$\Delta < 0$ et il y a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On pose :

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{encore appelée } \textit{pseudo-pulsation}}$$

ce qui permet d'écrire les deux racines sous la forme :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega$$

et la solution est de la forme :

$$\boxed{y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\,e^{j\omega t} + B\,e^{-j\omega t}\right)}$$

où A et B sont deux constantes complexes déterminées par les conditions initiales.

Une autre forme très utile de la solution s'obtient en introduisant les cosinus et sinus puisque :

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

On obtient :

$$y(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[\,(A + jB)\cos(\omega t) + (A - jB)\sin(\omega t)\,\right]$$

et donc, en définissant deux nouvelles constantes $a = A + jB$ et $b = A - jB$, nous obtenons :

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[\,a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\,\right]}$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\boxed{y(t) = A_m\,e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos(\omega t + \varphi)}$$

où $A_m > 0$ et φ sont deux constantes réelles.

4) Et si $Q \longrightarrow +\infty$ (c'est à dire un coefficient d'amortissement $m = 0$) ?

L'équation différentielle est alors celle d'un *oscillateur harmonique* :

$$\boxed{\ddot{y} + \omega_0^2\,y = 0}$$

La solution correspond au cas particulier du régime peudo-périodique où $Q \to +\infty$, ce qui donne (avec $\omega \to \omega_0$) :

$$\boxed{y(t) = a\cos\left(\omega_0 t\right) + b\sin\left(\omega_0 t\right)}$$