L'équation différentielle de l'oscillateur amorti
Document de cours

Nous donnons ci-dessous toutes les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti. Il s'agit d'une équation très courante en physique qui s'écrit :

$$\boxed{\ddot{y} + 2m\omega_0\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 0}$$

où $\omega_0 > 0$ est la *pulsation propre* et $m > 0$ le *facteur d'amortissement*.

La nature des solutions dépend des racines de l'équation caractéristique :

$$\boxed{r^2 + 2m\omega_0\,r + \omega_0^2 = 0}$$

Ces racines dépendent elles-mêmes du signe du discriminant :

$$\boxed{\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\,(m^2-1)}$$

1. $m > 1$: **régime apériodique**. $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles qui sont :

   $$r_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}$$

   En posant $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{m^2-1}}$ (appelée pseudo-pulsation), les deux racines s'écrivent :

   $$r_1 = -m\omega_0 + \omega \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 - \omega$$

   La solution est de la forme :

   $$\boxed{y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-m\omega_0 t}\,\{Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\}}$$

   où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

   Une autre forme très utile de la solution s'obtient en introduisant les cosinus et sinus hyperboliques, c'est à dire :

   $$\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

   et donc :

   $$e^{\omega t} = \mathrm{ch}(\omega t) + \mathrm{sh}(\omega t) \quad \text{et} \quad e^{-\omega t} = \mathrm{ch}(\omega t) - \mathrm{sh}(\omega t)$$

   On obtient :

   $$y(t) = e^{-m\omega_0 t}\,\{\,(A+B)\,\mathrm{ch}(\omega t) + (A-B)\mathrm{sh}(\omega t)\,\}$$

   et donc, en définissant deux nouvelles constantes $a = A + B$ et $b = A - B$, nous obtenons :

   $$\boxed{y(t) = e^{-m\omega_0 t}\,\{\,a\,\mathrm{ch}(\omega t) + b\mathrm{sh}(\omega t)\,\}}$$

2. $m = 1$: **régime critique**. $\Delta = 0$ et il y a une racine double $r_0 = -\omega_0$. La solution est de la forme :

   $$\boxed{y(t) = e^{-\omega_0 t}\,(A + Bt)}$$

3. $0 < m < 1$: **régime pseudo-périodique**. $\Delta < 0$ et il y a deux racines complexes conjuguées :

   $$r_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

   On pose $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}}$ (appelée encore pseudo-pulsation), ce qui permet d'écrire les deux racines sous la forme :

   $$r_1 = -m\omega_0 + j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -m\omega_0 - j\omega$$

   et la solution est de la forme :

   $$\boxed{y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-m\omega_0 t}\,\{Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}\}}$$

où A et B sont toujours deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Une autre forme très utile de la solution s'obtient en introduisant les cosinus et sinus puisque :

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

On obtient :

$$y(t) = e^{-m\omega_0 t}\,\{\,(A + jB)\,\cos(\omega t) + (A - jB)\sin(\omega t)\,\}$$

et donc, en définissant deux nouvelles constantes $a = A + jB$ et $b = A - jB$, nous obtenons :

$$\boxed{y(t) = e^{-m\omega_0 t}\,\{\,a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\,\}}$$

4. Et si $m = 0$? L'équation différentielle est alors celle d'un **oscillateur harmonique** :

$$\ddot{y} + \omega_0^2\,y = 0$$

La solution correspond au cas particulier où $m \to 0$, ce qui donne (avec $\omega \to \omega_0$) :

$$\boxed{y(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)}$$