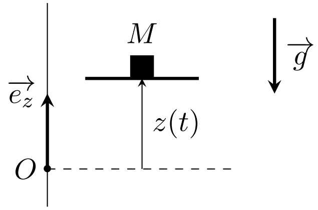
TD $n°4$: Quelques révisions de mécanique MPSI

1 Oscillations d'une masse sur un support

Un point matériel M de masse m est placé sur un plateau horizontal animé d'un mouvement oscillatoire de la forme : $z(t) = a\cos(\omega t)$. Chercher la condition sur ω pour que le point matériel ne quitte jamais le plateau.



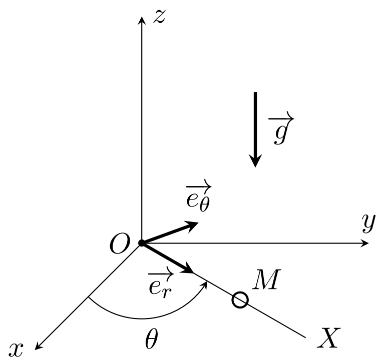
2 Mouvement d'un anneau sur une tige

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.

À un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire $\theta(t)$ et la position de l'anneau sur la tige par $r(t)$. À l'instant initial $t = 0$, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige, à partir du point M_0, repéré par les coordonnées polaires : $\theta(t = 0) = 0$ et $r(t = 0) = r_0$.

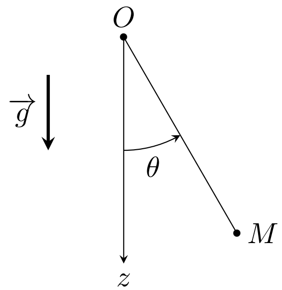
1) Établir l'équation différentielle satisfaite par $r(t)$. Quelle en est la solution compte tenu des conditions initiales ?

2) Déterminer la réaction $\overrightarrow{N}(t)$ exercée par la tige sur l'anneau en fonction du temps t.



3 Pendule simple

Un petit objet M de masse m est attaché au bout d'un fil de longueur L, dont l'autre extrémité est fixée en O. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{e_z}$ et la position de M est repérée par l'angle θ.



1) a) Énoncer le théorème du moment cinétique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) Retrouver cette équation différentielle par une méthode énergétique.

2) À $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et on communique à M une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$. Quelle est alors l'expression de $\theta(t)$ dans l'hypothèse des petits mouvements ? Quelle est la période T_0 de ce mouvement ?

3*) On ne fait plus l'hypothèse des petits mouvements. La masse m est maintenant abandonnée sans vitesse initiale à partir d'une position repérée par l'angle $\theta_0 \in]0, \pi/2[$.

a) Montrer que la période T du mouvement est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

b) On réalise le changement de variable $\sin\phi = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$. En déduire que T se met sous la forme :

$$T = T_0\, f\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\phi}}$$

$f(x)$ est appelée *intégrale elliptique* de première espèce.

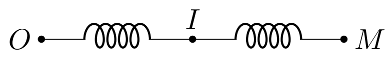
c) Montrer que, pour de petites oscillations, l'expression précédente conduit à la formule approchée :

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\sin^2(\theta_0/2)}{4}\right)$$

d) Dans quel intervalle doit être situé θ_0 pour que la différence entre T et T_0 soit inférieure à 1% ?

4 Associations de ressorts

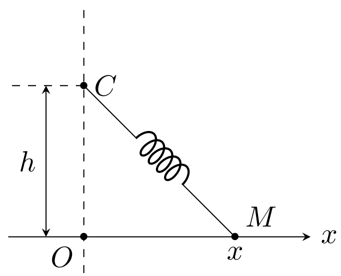
Deux ressorts caractérisés par (k_1, ℓ_{01}) et (k_2, ℓ_{02}) sont mis bout à bout en étant accrochés en un point I de masse nulle.



Montrer que cette association est équivalente à un seul ressort dont on déterminera la raideur k et la longueur à vide ℓ_0.

5 Positions d'équilibre stables ou pas ?

On dispose d'un ressort de raideur k, de longueur naturelle L_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est reliée à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottement sur un axe Ox horizontal. On note h la distance OC.



1) Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de M en fonction de son abscisse x.

2) Étudier les positions d'équilibre de M et discuter leur stabilité en fonction du rapport $\frac{L_0}{h}$.

6 Lois de Kepler

Une planète P de masse m est soumise à l'attraction du Soleil de masse M_S. On se place dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen.

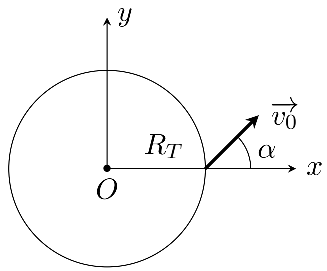
1) Énoncer les trois lois de Kepler. À quelle époque furent-elles formulées ?

2) Démontrer la troisième loi de Kepler dans le cas où le mouvement de P est circulaire. Quelle est alors la vitesse v_c en fonction de G (constante universelle de la gravitation), M_S et R (rayon de la trajectoire) ?

3) Toujours dans le cas du mouvement circulaire, quelles sont les expressions des énergies cinétique E_c, potentielle E_p et mécanique E_m ?

7 Force centrale

On étudie le mouvement d'un petit objet M, supposé ponctuel de masse m, dans le référentiel géocentrique (R_G) supposé galiléen. La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de masse M_T et de rayon R_T. L'objet est uniquement soumis à la force de gravitation exercée par la Terre : on notera G la constante de gravitation. On néglige tous les frottements éventuellement dûs à l'atmosphère.



L'objet est lancé depuis un point M_0 de la surface terrestre, situé sur Ox, avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec la verticale locale. On pose :

$$v_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

1) Montrer que la trajectoire de M est plane.

2) Le plan de cette trajectoire est muni du repère (Oxy) et on introduit les coordonnées polaires (r, θ) de M, auxquelles on associe la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, en choisissant Ox comme axe polaire.

Montrer que : $r^2\dot{\theta} = C$ où C est une constante qu'on exprimera en fonction de R_T, v_0 et α.

3) Le mouvement est-il conservatif ? Donner l'énergie potentielle $E_p(r)$ de M.

4) On souhaite placer l'objet sur une trajectoire elliptique. Quelle inégalité doit vérifier le rapport $\frac{v_0}{v_C}$? La valeur de l'angle α est-elle déterminante ?

5*) a) Soit E_m l'énergie mécanique. Montrer que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_m$ et donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$.

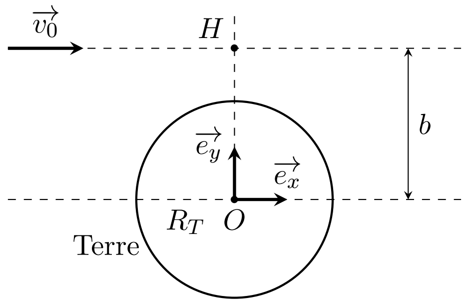
b) On se place dans le cas particulier où $v_0 = v_C$ et on pose $x = r/R_T$. Montrer que les distances minimale r_m et maximale r_M de la trajectoire sont solutions de l'équation :

$$x^2 - 2x + \sin^2(\alpha) = 0$$

c) En déduire que l'objet retombera nécessairement en un point A de la surface terrestre pour toutes les valeurs de $0 < \alpha < \pi/2$. Quelle sera la norme v_A de la vitesse en ce point ?

8 Déviation d'un corps céleste

Le mouvement d'un météore est étudié dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Ce corps céleste, supposé ponctuel M de masse m arrive de l'infini avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$. On désigne par $b = OH$ son paramètre d'impact. Il entre dans le champ gravitationnel terrestre et sa trajectoire est déviée. La masse de la Terre est M_T.



1) Quelle est la nature de la trajectoire de M (ellipse, parabole ou hyperbole) ?

2) Soit S le point de la trajectoire le plus proche du centre de la Terre. On note $r_{\min}$ la distance entre M et le centre de la Terre en ce point et par v_S la norme de la vitesse en S.

a) Déterminer la constante des aires C en fonction de v_0 et b. En déduire v_S en fonction de $r_{\min}, b$ et v_0

b) À l'aide de l'énergie, calculer la distance minimale d'approche $r_{\min}$ en fonction de M_T, G (constante de la gravitation), v_0 et b. En déduire la valeur minimale $b_{\min}$ pour que le météore contourne la Terre, de rayon R_T, sans la heurter.