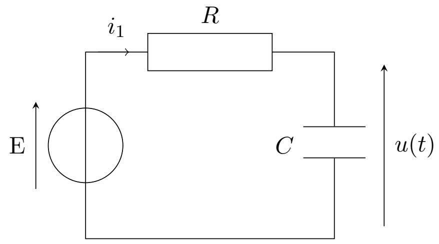
Correction - DS n°1 (CCP-e3a) - Electrocinétique

1 Oscilloscope numérique

1. La fréquence f d'un signal périodique $s(t)$ quelconque ne représente que la fréquence du terme fondamental de son développement en série de Fourier. Sauf si c'est un signal purement sinusoïdal, le spectre de celui-ci contient aussi des harmoniques de fréquences plus élevée que f. Pour que $s(t)$ soit correctement reproduit par l'oscilloscope (oscilloscope vu comme un filtre), il ne faut pas éliminer ces harmoniques : il convient donc de choisir une bande passante bien supérieure à la fréquence maximale de $s(t)$ que l'on souhaite utiliser.
2. Pour des signaux triangle ou carré, on sait que les harmoniques ont des fréquence multiples impaires de la fréquence fondamentale f : $3f$, $5f$, $7f$ etc ... Si on souhaite garder au minimum les 4 premières harmoniques sans observer le repliement du spectre, il faut d'abord utiliser un filtre passe-bas anti-repliement de fréquence de coupure $f_c > 9f$ de sorte que la fréquence maximale soit $f_{max} = 9f$ et échantillonner à F_e telle que (critère de Shannon) :
$$F_e > 2f_{max} \Longrightarrow F_e > 18f \approx 20f$$
Dans le cas limite où $f = 10$MHz, cela donne $F_e = 200$ MHz.
3. 1 ko = 1024 octets, donc 256 ko = 262 144 octets ce qui représente $N = 131\ 072$ échantillons. La période du signal est $T = 1 \times 10^{-4}$ s, donc 10 périodes correspondent à une durée totale d'acquisition $10T = 1 \times 10^{-3}$ s qui est aussi égale à $NT_e = N/F_e$. Nous avons donc :
$$\frac{N}{F_e} = 10^{-3} \Longrightarrow F_e = 10^3 \times 131072 \approx 131MHz$$
4. Dans ce cas :
$$\frac{N}{F_e} = 10^{-3} \Longrightarrow N = 10^{-3}\,F_e = 10^{-3} \times 100 \times 10^6 = 10^5$$
Cela occupe donc 200 000 octets en mémoire, c'est à dire environ 195 ko. Pour 1 période, il y a dix fois moins d'échantillons, c'est à dire 10 000 échantillons.

2 Oscillations électriques d'une lampe

1. Au début la lampe est éteinte : le condensateur se charge donc à travers la résistance R et la tension $u(t)$ augmente. Si celle-ci atteint E_a, la lampe s'allume ce qui correspond à un changement de régime. Si le condensateur se décharge dans les résistances, $u(t)$ va diminuer et s'il atteint E_e la lampe va s'éteindre. Le circuit se retrouve donc dans l'état du début et le condensateur va recommencer à se charger. On peut donc assister à un processus périodique de charge et de décharge du condensateur, avec allumage et extinction de la lampe, sous des conditions que l'on va étudier.
2. Le circuit est un simple circuit RC série :



a) Une loi des mailles conduit à :

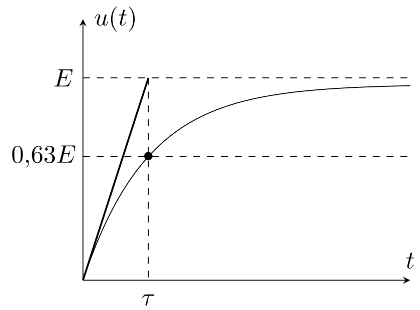
$$\boxed{E = Ri_1 + u = RC\,\frac{du}{dt} + u \quad \text{donc} \quad \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}}$$

On peut donc introduire :

$$\boxed{\tau = RC}$$

b) $u(t) = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + E$ avec $u(0) = 0$, d'où :

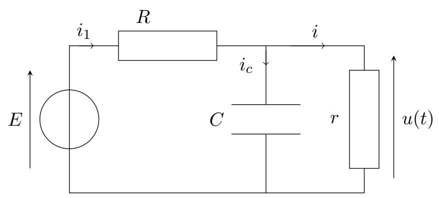
$$\boxed{u(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$$



c) La lampe s'allume à l'instant t_a tel que $u(t_a) = E_a$ d'où :

$$\boxed{E_a = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t_a}{\tau}\right)\right] \implies t_a = \tau\,\ln\left(\frac{E}{E - E_a}\right)}$$

3. Le schéma équivalent du circuit devient maintenant :



a) Une loi des mailles donne :

$$E = Ri_1 + u \Longrightarrow i_1 = \frac{E - u}{R}$$

D'autre part, un loi des noeuds conduit à :

$$i_1 = i + i_c = \frac{u}{r} + C\,\frac{du}{dt}$$

et donc :

$$\frac{E - u}{R} = \frac{u}{r} + C\,\frac{du}{dt} \implies \frac{du}{dt} + \frac{r + R}{rRC}\,u = \frac{E}{RC}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau_0} = \frac{E}{RC}}$$

b) La solution de cette équation est :

$$u(t) = A' \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + \frac{rE}{r+R} = A' \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + E_0$$

Les conditions initiales sont : $u(t_a) = E_a$ ce qui conduit à :

$$E_a = A' \exp\left(-\frac{t_a}{\tau_0}\right) + E_0 \quad \text{donc} \quad A' = (E_a - E_0) \exp\left(\frac{t_a}{\tau_0}\right)$$

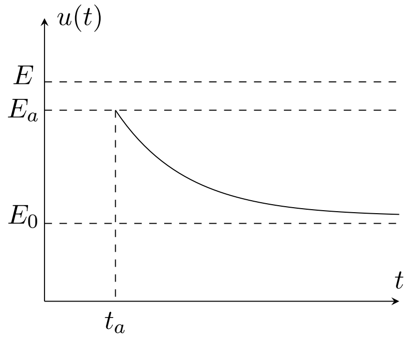
et donc :

$$\boxed{u(t) = (E_a - E_0)\left(-\frac{t - t_a}{\tau_0}\right) + E_0}$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{u} = -\frac{(E_a - E_0)}{\tau_0}\left(-\frac{t - t_a}{\tau_0}\right)$$

et si on suppose que $E_0 < E_a$, celle-ci est de signe négatif : $u(t)$ décroît donc à partir de t_a.



c) Tout d'abord, on a vu à la question précédente qu'il était nécessaire que $E_0 < E_a$ pour que $u(t)$ soit décroissante. D'autre part, il faut que $E_e > E_0$ pour que le seuil d'extinction puisse être atteint. On aura donc :

$$\boxed{E_0 < E_e < E_a}$$

d) t_e est solution de $u(t_e) = E_e$, ce qui conduit à :

$$\boxed{t_e = t_a + \tau_0 \ln\left(\frac{E_a - E_0}{E_e - E_0}\right)}$$

4. L'équation différentielle vérifiée par u est à nouveau celle de la question 2. Sa solution est donc :

$$u(t) = A'' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E \quad \text{avec} \quad u(t_e) = E_e$$

d'où :

$$A'' = (E_e - E)\, \exp\left(\frac{t_e}{\tau}\right)$$

et

$$\boxed{u(t) = (E_e - E)\, \exp\left(-\frac{t - t_e}{\tau}\right) + E}$$

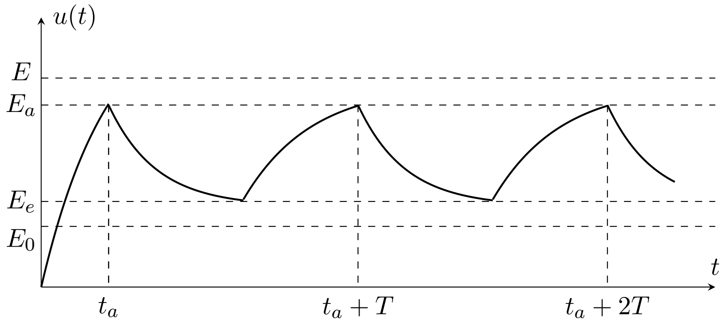
Sa dérivée est $\dot{u} = -\dfrac{E_e - E}{\tau}\, \exp\left(-\dfrac{t - t_e}{\tau}\right) > 0$ puisque $E_e < E$. La tension $u(t)$ se remet à croître à nouveau et tend vers E : le seuil d'allumage sera donc atteint à un instant t'_a vérifiant $u(t'_a) = E_a$, ce qui mène à :

$$\boxed{t'_a = t_e + \tau\, \ln\left(\frac{E_e - E}{E_a - E}\right)}$$

5. La période T est donc :

$$\boxed{T = (t'_a - t_e) + (t_e - t_a) = \tau\,\ln\left(\frac{E_e - E}{E_a - E}\right) + \tau_0 \ln\left(\frac{E_a - E_0}{E_e - E_0}\right)}$$

6. Courbe caractéristique de $u(t)$:



3 Un analyseur de Fourier très simplifié (d'après CAPES 2005)

3.1 Quelques généralités

1. Notons $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les signaux de sortie correspondant respectivement aux signaux d'entrée $e_1(t)$ et $e_2(t)$. **Un système est dit linéaire si la réponse au signal d'entrée** $e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2)$ **est** $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.
2. a) **Le système 1 est linéaire** : il agit séparément sur chaque fréquence, sans en générer de nouvelles. C'est un **filtre passe-bas** (hautes-fréquences supprimées) de fréquence de coupure de l'ordre de $f_c = 3$ kHz.

   b) **Le système 2 est linéaire** : c'est un filtre passe-bande de fréquence centrale de l'ordre de $f_0 = 3$ kHz et de bande passante $\Delta f \approx 2$ kHz.

   Le système 3 n'est pas linéaire car des signaux de fréquences 500 Hz et 3,5 kHz apparaissent en sortie à partir d'un signal qui n'en contient pas.

3.2 Filtres peu sélectifs

1. À basse fréquence un condensateur se comporte comme un coupe-circuit. A haute fréquence un condensateur se comporte comme un fil.
   Montage RC
   BF : $v_s = v_e - Ri = v_e$; HF : $v_s = 0$ donc filtre passe bas.
   Montage CR
   BF : $v_s = Ri = 0$; HF : $v_s = v_e$ donc filtre passe haut.
2. Filtre RC :

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{R}} = \frac{1}{1 + R\,\underline{Y_c}} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

   Filtre CR :

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R}{\underline{Z_c} + \underline{R}} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

3. Voir figures 1 et 2.

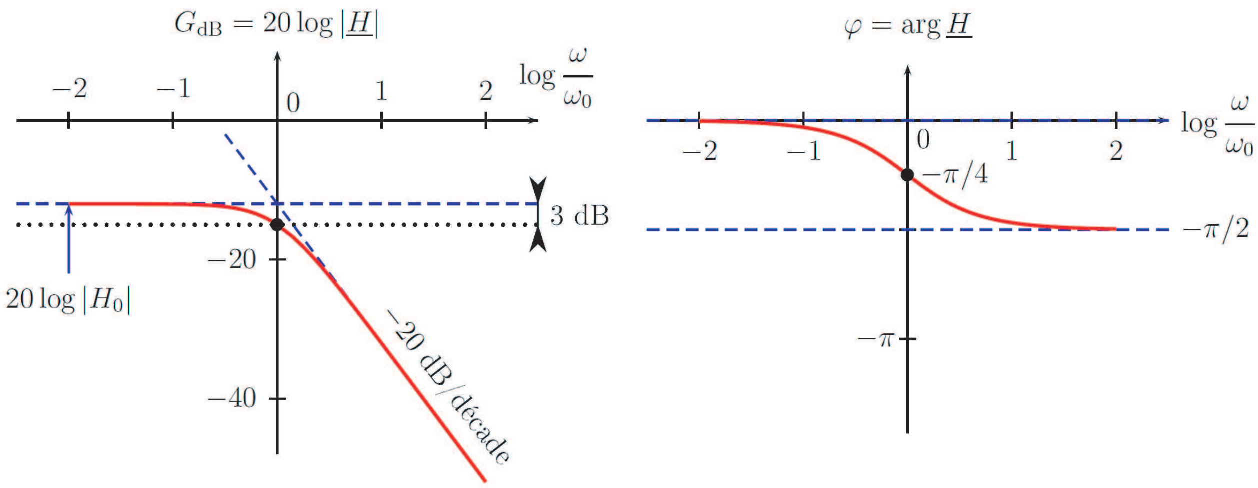


FIGURE 1 – *Diagramme de Bode du filtre RC.*

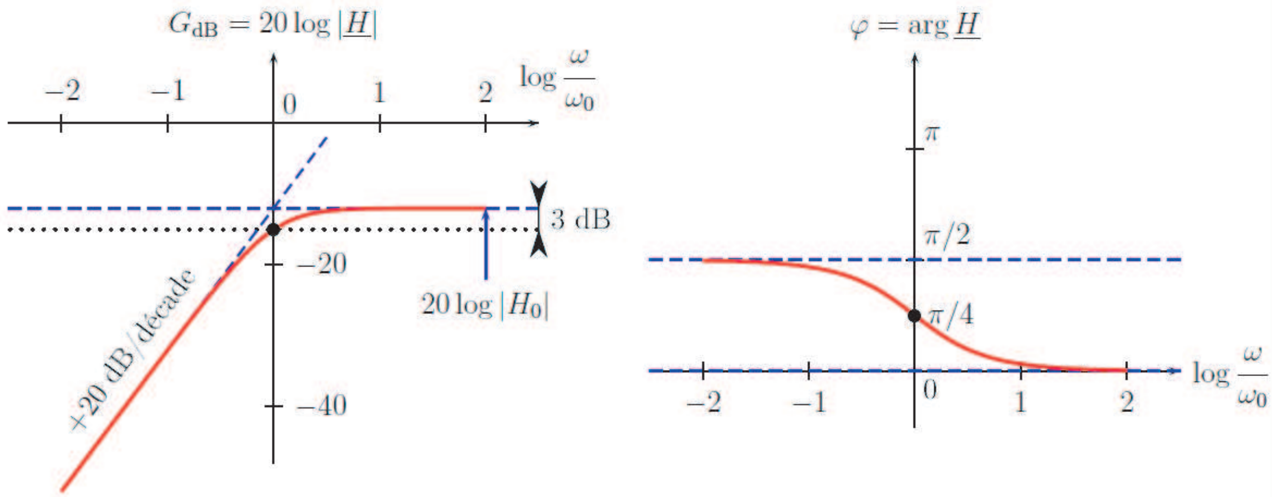
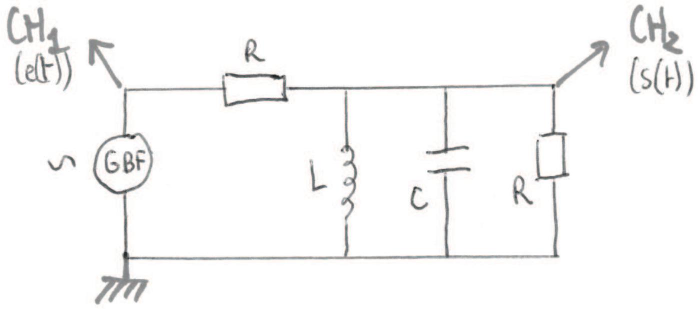


FIGURE 2 – *Diagramme de Bode du filtre CR.*

4. a) C'est un filtre dérivateur à basse fréquence et qui ne modifie pas le signal à haute fréquence. Il s'agit d'un passe haut avec une fréquence de coupure de l'ordre de quelques centaines de Hz (on peut voir que le temps de montée est de l'ordre de $\tau = 1ms$, et $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$).
   b) C'est un filtre intégrateur à haute fréquence et qui ne modifie pas le signal à basse fréquence. Il s'agit d'un passe bas. Là encore, le temps de montée est de l'ordre de $\tau = 1ms$, et la fréquence de coupure est de l'ordre de quelques centaines de Hz.

3.3 Filtre sélectif

1) 

CH1 et CH2 sont les bornes d'entrée de l'oscilloscope.

2) Afin d'étudier le comportement en fréquence du circuit, on peut :
→ soit faire varier "à la main" la fréquence délivrée par le GBF, et mesurer l'amplitude et la phase de la tension de sortie.
→ soit utiliser le mode wobulation du GBF (le GBF délivre alors un signal sinusoïdal dont la fréquence varie lentement et linéairement avec le temps). On observe alors, en mode XY, la tension de sortie en fonction de la fréquence (la sortie "SWEEP OUT" du GBF fournit un signal linéaire avec la fréquence).

3) D'après le théorème de Fourier, tout signal périodique se décompose en une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux. Le filtre étant linéaire, il agit indépendamment sur chaque fréquence. Le signal de sortie est alors la somme des réponses pour chaque fréquence.

4) On applique un pont diviseur de tension $\left(\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R+\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{1+\frac{R}{\underline{Z_{eq}}}} = \frac{1}{1+1+\frac{R}{jL\omega}+jRC\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1/2}{1+j\frac{RC\omega}{2} - j\frac{R}{2L\omega}}$$; on reconnaît un passe-bande

et on peut identifier avec la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/2 \\ \frac{RC}{2} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{R}{2L} = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 = 1/2 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

5) Les pulsations de coupure sont définies par :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En posant $x = \frac{\omega_c}{\omega_0}$, on obtient $1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$.

soit $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q} \Rightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$

Dans les 2 cas $\pm$, on a $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles.

Dans le cas $\oplus$ $\left(x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0\right)$: $x = \frac{-1}{2Q} \oplus \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$ → solution qui conduit à $x > 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\omega_{c1}}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \Rightarrow \omega_{c1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$$

Dans le cas $\ominus$ $\left(x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0\right)$: $x = \frac{1}{2Q} \oplus \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$ → solution qui conduit à $x > 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\omega_{c2}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \Rightarrow \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$$

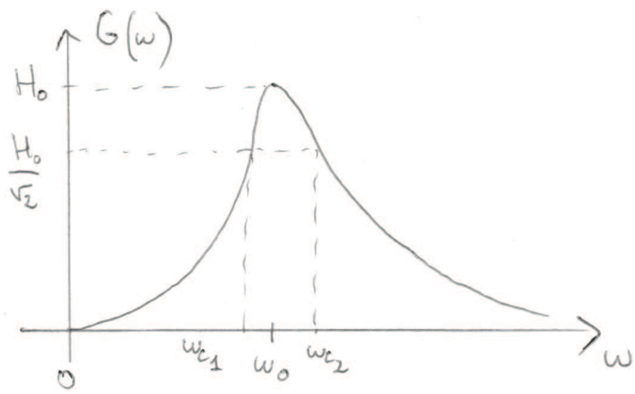
Finalement, on peut en déduire l'expression de la bande passante :

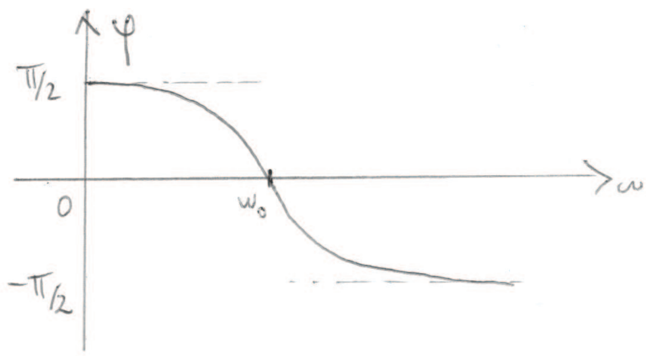
$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

6) $$G = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$$

	G	φ
$x \to 0$	0	$\pi/2$
$x \to 1$	H_0	0
$x \to \infty$	0	$-\pi/2$





3.4 Analyseur de Fourier élémentaire

1. Ce sont les harmoniques du signal.
2. Le filtre est très sélectif ($Q = 20$) et ne sélectionne que la composante oscillant à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$, sans ajouter de déphasage soit $s(t) = \dfrac{2E}{\pi}\cos(2\pi f_0 t)$.
   C'est un signal purement sinusoïdal.
3. En reprenant les expressions précédentes de Q et ω_0, on obtient :

   $$C = \frac{Q}{\pi f} = 2.1\ \mu F \qquad \text{et} \qquad L = \frac{R}{4\pi Q f} = 1.3mH$$

   Pour choisir la résistance, il faut qu'elle soit suffisamment grande devant la résistance de sortie du GBF, et suffisamment petite devant celle de l'oscilloscope, afin que le calcul de la fonction de transfert soit valable. On a donc :

   $$50\ \Omega \ll R \ll 1\ M\Omega$$

4. Il suffit de modifier la fréquence de résonance f_0 du filtre passe bande en jouant sur les valeurs des composants. On notera que les filtres utilisés dans les véritables analyseurs de spectre sont fabriqués différemment, de sorte que le facteur de qualité reste constant lorsque la fréquence sélectionnée est modifiée.