DS n°1bis (Centrale - Mines) - Electrocinétique

1 Oscilloscope numérique

La structure d'un oscilloscope numérique comprend un étage d'entrée atténuateur qui possède une impédance d'entrée de 1 MΩ, un échantillonneur fonctionnant à la fréquence F_e, un convertisseur qui quantifie les données et les envoie dans la mémoire et un système de traitement pour fournir l'image sur l'écran de l'oscilloscope. Un utilisateur souhaite pouvoir analyser des signaux classiques : sinusoïdal, triangle, créneau, présentant des fréquences comprises entre 0,1 Hz et 10 MHz.

1. Pourquoi ne peut-on pas se contenter d'un oscilloscope dont la bande passante est égale à la fréquence maximale souhaitée, c'est à dire 10 MHz ?
2. Quelle est la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_e nécessaire ?
3. La notice de l'appareil précise que, pour une bonne gestion de la capacité de la mémoire, F_e est ajustée en fonction du calibre sélectionné sur l'appareil. En supposant qu'un échantillon occupe 2 octets d'une mémoire qui possède une capacité de 256 ko, quelle fréquence d'échantillonnage F_e maximale permettrait d'observer 10 périodes d'un signal de fréquence 10 kHz ?
4. On restreint la cadence à $F_e = 100$ MHz. Quelle est la capacité mémoire occupée par 10 périodes du signal à 10 kHz ? Combien cela représente-t-il d'échantillons par période ?

2 Étude de filtres

I. Réalisation d'une alimentation continue

On dispose d'une tension $u_e(t)$ *de la forme :* $u_e(t) = E_0 + E_m\cos(\omega t)$ *de valeur moyenne* $E_0 = 5{,}0$ V. *Cette tension possède une ondulation sinusoïdale de fréquence* $f = \omega/2\pi = 100$ Hz *et d'amplitude* $E_m = 1{,}5$ V.

On souhaite étudier différents types de filtres susceptibles de fournir une tension $u_s(t)$ *pratiquement constante. Chaque filtre est caractérisé par sa fonction de transfert* $\underline{H}(j\omega)$. *On notera* $G(\omega)$ *le gain et* $\Phi(\omega)$ *la phase. Par ailleurs, on notera* $H_0 = \underline{H}(j0)$ *la valeur particulière de la fonction de transfert à pulsation nulle.*

1. Montrer que $u_s(t)$ peut s'écrire de façon générale sous la forme :

$$u_s(t) = S_0 + S_m\cos(\omega t + \Phi_s)$$

   Donner l'expression de S_0, puis celles de S_m et Φ_s en fonction de grandeurs à choisir parmi E_m, E_0, $G(\omega)$, $\Phi(\omega)$ et H_0.

2. Le premier filtre étudié est représenté ci-dessous (*figure 1*). Il est réalisé à partir de deux résistances R_1 et R_2 et d'un condensateur de capacité C.

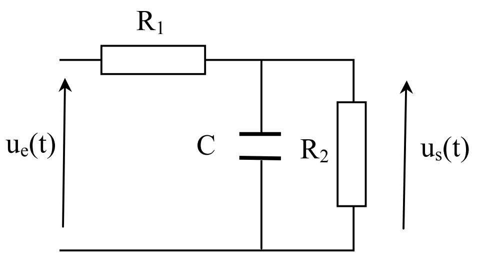


Figure 1

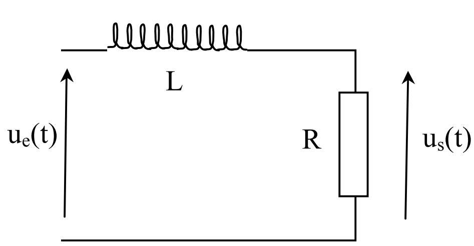


Figure 2

a) Déterminer la nature de ce filtre en analysant qualitativement son comportement basse fréquence et haute fréquence.
b) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Quelle est sa fréquence de coupure f_C à -3 dB ?
c) Représenter soigneusement et en le justifiant le diagramme de Bode de ce filtre (gain et phase).
d) Déterminer S_0 et le quotient S_m/S_0 en fonction de R_1, R_2, C et du rapport E_m/E_0.
e) On s'impose $R_1 = 100\ \Omega$ et on souhaite $S_0 = 4{,}0$ V et $S_m/S_0 = 1{,}0.10^{-2}$. Calculer la valeur de R_2 et la valeur de la capacité C qui permettent d'obtenir cela.

3. On utilise maintenant le filtre représenté sur la *figure 2*.

a) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre. Retrouver les comportements basse fréquence et haute fréquence en analysant qualitativement ce montage.
b) $R = 100\ \Omega$. Quelle valeur doit-on donner à l'inductance L pour obtenir un rapport $S_m/S_0 = 1{,}0.10^{-2}$? Ce résultat vous semble-il raisonnable ?

II. Étude d'un filtre sélectif

On applique maintenant une tension $u_e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω à l'entrée du filtre RLC représenté sur la figure 3 avec $R = 20$ kΩ, $C = 2{,}0\ \mu$F et $L = 20$ mH.

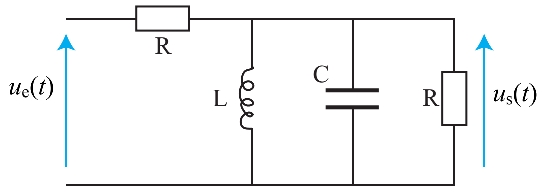


Figure 3

1. Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ du filtre, sous forme normalisée. Quels sont sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q ? Donner leurs valeurs numériques.
2. Déterminer le gain $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et le déphasage $\Phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ introduits par le filtre.
3. Que vaut la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante à -3 dB de ce filtre ? Une démonstration précise est attendue.

Pour tout la suite du problème, la tension $u_e(t)$ appliquée à l'entrée du filtre RLC *est désormais un signal triangle de période* $T = 3{,}77$ ms, de pulsation associée ω_f *et d'amplitude* $A = 10{,}0$ V (voir *figure 4*).

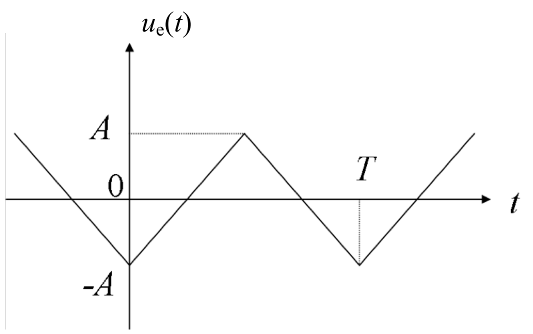


Figure 4

On donne la série de Fourier associée à ce signal :

$$u_e(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, 8A}{\pi^2(2p+1)^2} \sin[\,(2p+1)\omega_f t\,]$$

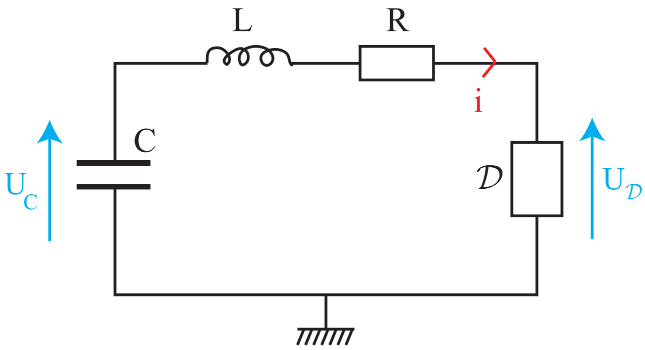
4. Comparer numériquement les valeurs de ω_0 et ω_f.
5. Pourquoi chercher $u_s(t)$ sous la forme :

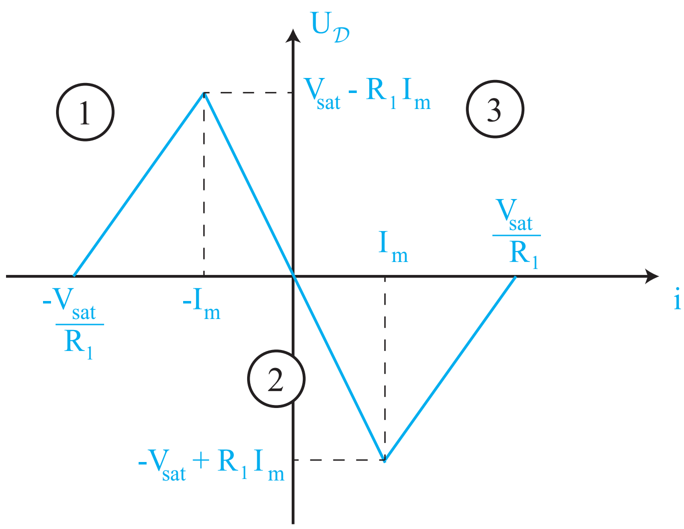
$$u_s(t) = A_0 \sin(\omega_f t + \Phi_0) + \frac{A_1}{3^2} \sin(3\omega_f t + \Phi_1) + ... + \frac{A_p}{(2p+1)^2} \sin[\,(2p+1)\omega_f t + \Phi_p\,] + ...$$

   Déterminer l'amplitude A_p et le déphasage Φ_p du terme de rang $k = 2p+1$ en fonction de Q, ω_f, ω_0 et A.
6. AN : calculer A_p et Φ_p pour les termes de pulsation ω_f , $3\omega_f$ et $5\omega_f$. Quel est le terme prépondérant ? Comment s'écrit approximativement $u_s(t)$? Pouvait-on prévoir ce résultat sans calculs ?
7. Représenter soigneusement sur le même schéma $u_e(t)$ et $u_s(t)$. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

3 Oscillateur à résistance négative

On étudie le montage électrique représenté sur la figure de gauche ci-dessous. Il fait intervenir un dipôle $\mathcal{D}$ actif dont la caractéristique $U_{\mathcal{D}} = f(i)$ est représentée ci-contre.





I. Étude du dipôle $\mathcal{D}$, dit "à résistance négative"

Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'au dipôle $\mathcal{D}$, caractérisé par les constantes I_m, V_{sat} et R_1.

1. Pour quelles valeurs de l'intensité i le dipôle $\mathcal{D}$ se comporte-t-il comme une "résistance négative" ?
2. On notera $-R_2$ avec $R_2 > 0$ cette résistance négative. Exprimer R_2 en fonction de R_1, V_{sat} et I_m.
3. Établir les relations liant $U_{\mathcal{D}}$ et i dans les deux autres zones de la caractéristique.

II. Montage oscillateur

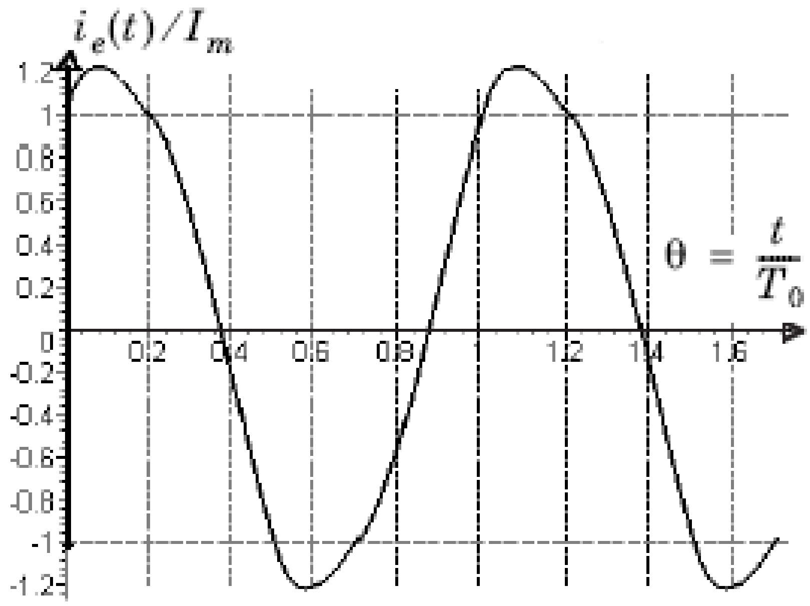
Conditions de démarrage des oscillations

Le dipôle $\mathcal{D}$ est désormais connecté à l'association en série d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R. Lorsque les dipôles sont connectés, l'intensité du courant circulant dans la bobine est initialement nulle et la tension aux bornes du condensateur est $U_c(t=0) = U_0$ suffisamment faible pour que le dipôle $\mathcal{D}$ puisse être considéré comme une "résistance négative".

1. Montrer que $i(t)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme
$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0 \ .$$
Exprimer l'amortissement ξ et la pulsation ω_0 en fonction de L, C, R et R_2.
2. D'après les conditions initiales, quelles sont les valeurs de $i(t = 0)$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0)$? On suppose que $|\xi| < 1$. Expliciter la solution $i(t)$.
3. Que se passe-t-il si U_0 est nul ? Commenter.
4. On suppose donc que U_0 n'est pas nul mais de très faible valeur. Quelle est la condition sur ξ puis sur α pour que les oscillations de i présentent une amplitude croissante au cours du temps ? On suppose désormais que cette condition est réalisée.
5. *AN :* $R_2 = 350\,\Omega$, $R = 100\,\Omega$, $C = 1,28$ nF, $L = 2$ mH. Calculer la valeur de ξ et de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Amplitude des oscillations

6. Représenter l'allure de l'évolution de $i(t)$ en fonction du temps à compter de $t = 0$. En utilisant la caractéristique du dipôle $\mathcal{D}$, montrer que cette loi d'évolution n'est valable que sur une durée limitée.
7. Donner l'autre équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ après cette phase de démarrage.
8. Après un régime transitoire que l'on n'étudiera pas, les variations de i en fonction du temps suivent un régime périodique établi. La figure ci-dessous montre les évolutions de i/I_m en fonction de la variable réduite $\theta = t/T_0$.



Déterminer les domaines de cette courbe qui se rapportent respectivement aux zones (1), (2) et (3) de la caractéristique de $\mathcal{D}$.
9. Comment qualifier les oscillations représentées sur la figure précédente ? Évaluer la période, puis la fréquence f de ces oscillations ainsi que la valeur maximale de i.
Application numérique : mêmes valeurs que précédemment, et $R_1 = 2,5\,\mathrm{k}\Omega$ et $V_{\text{sat}} = 15$ V.
10. Donner, pour ce régime établi, la valeur maximale de la tension $U_{\mathcal{D}}(t)$.