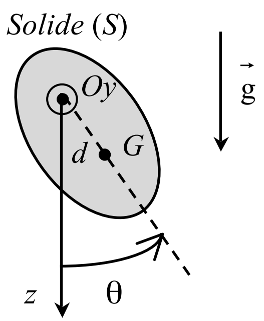
TD n°7 : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Révisions MPSI

1 Pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'un solide (S) de masse m pouvant tourner sans frottements autour d'un axe horizontal Oy. Le barycentre G de ce solide n'est pas situé sur l'axe de rotation : il est décalé d'une distance $d = OG$ par rapport à celui-ci.



La rotation de (S) autour de Oy est repérée par l'angle $\theta(t)$ et le moment d'inertie de (S) par rapport à cet axe est noté J.

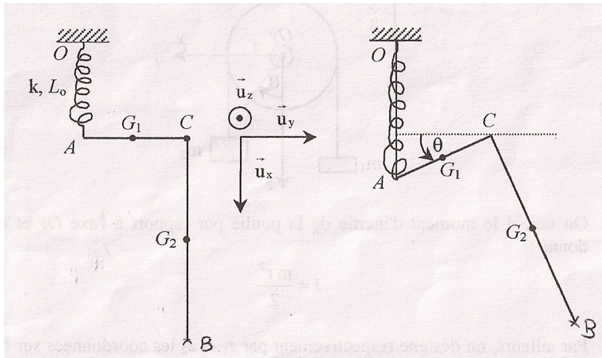
1. Établir l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit l'angle θ.
2. Dans l'approximation des petits mouvements autour de la position d'équilibre, en déduire $\theta(t)$ en fonction du temps si on abandonne (S) sans vitesse initiale à partir de l'angle θ_0.

2 Système tiges - ressort

Deux tiges CA et CB de masses m et $2m$, de longueurs L et $2L$, sont solidaires et perpendiculaires entre elles. Elles sont assujetties par une liaison parfaite à tourner dans le plan vertical (Cxy) autour de l'axe fixe Cz. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz du solide $\{ACB\}$ est :

$$J = 3\,mL^2$$

En A est fixé un ressort de raideur k et dont la longueur à vide est L_0 : la position de son autre extrémité O est choisie de sorte que CA soit horizontal lorsque le système est en équilibre.



On étudie les petits mouvements de rotation de ce solide, repérés par l'angle θ, en supposant que θ est suffisamment petit pour considérer que le ressort reste toujours vertical.

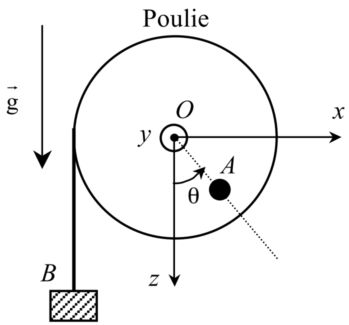
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.
2. En déduire la période des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre.

3 Oscillations d'une poulie

Le système étudié est constitué d'une poulie, assimilée à un disque de masse m, de rayon R et de centre O, sur laquelle on a soudé en un point A une masse ponctuelle m_A. On note $OA = a$ ($a < R$) la distance entre O et A. La poulie peut tourner sans frottement autour de l'axe Oy grâce à une liaison pivot parfaite et son moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est noté J.

Un fil, sans masse et inextensible, est enroulé dans la gorge de la poulie. Son mouvement se fait sans aucun glissement par rapport à celle-ci. À l'autre extrémité de ce fil est attaché un objet B de masse m_B.

La rotation du solide { Poulie + A } est repéré par l'angle θ. À $t = 0$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale, avec un angle θ_0.



1. Quel est l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$ du solide { Poulie + A }, en fonction de J, m_A, a et de $\dot{\theta}$?
2. À l'aide du théorème du moment cinétique, établir une équation reliant $\ddot{\theta}$, m_A, g, a et la norme T de la tension exercée par le fil sur la poulie (Relation 1).
3. Le fil ne glissant pas sur la poulie et étant inextensible, exprimer la vitesse $\vec{v}_B$ de l'objet B en fonction de R et de $\dot{\theta}$ (Relation 2).
4. Appliquer le PFD à l'objet B (Relation 3).
5. Déduire des 3 relations trouvées aux questions précédentes l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.
6. a) Quelle est la valeur $\theta_{éq}$ de θ lorsque le système est en équilibre ? À quelle condition cet équilibre peut-il être réalisé ?
   b) Dans le cas où l'équilibre est possible, en déduire la période T des petits mouvements autour de cette position d'équilibre.

4 Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et il est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $J = \dfrac{mL^2}{3}$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}$$
3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}. On donne, pour $\theta_0 = 5°$:
$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$