TD Lois du frottement solide

1 Équilibre sur un plateau tournant

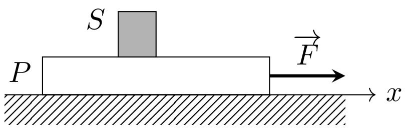
Un disque P tourne autour de son axe de symétrie supposé vertical et fixe dans le référentiel terrestre galiléen. La vitesse angulaire ω est constante. On y dépose un jeton à une distance r de l'axe de rotation. À quelle condition le jeton reste-t-il à l'endroit où on l'a posé ?

On se donne le coefficient statique de frottement jeton - plateau : f_s.

2 Entraînement par frottements

Un solide S de masse m_1 est placé sur une planche P de masse m_2, et l'ensemble repose sans frottement sur un plan horizontal (on pourra supposer qu'il s'agit d'une surface gelée, comme une patinoire par exemple). Le coefficient de frottement de glissement entre la barre et la planche est noté f (on confond les coefficients de frottement statique et dynamique).

On exerce sur la planche une force horizontale $\overrightarrow{F} = \alpha t\,\overrightarrow{e_x}$ dont l'intensité croît linéairement avec le temps, α étant une constante positive.



On appelle respectivement $\overrightarrow{v}_1 = v_1\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}_2 = v_2\,\overrightarrow{e_x}$ les vitesses du solide S et de la planche P par rapport au sol, supposée galiléen. On suppose que $v_1(0) = v_2(0) = 0$.

1) Écrire les équations différentielles du mouvement vérifiées par v_1 et par v_2. On introduira les forces nécessaires.

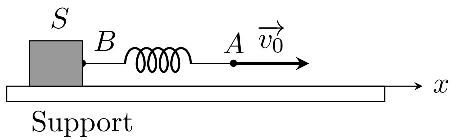
2) On suppose dans un premier temps que S ne glisse pas sur la planche. Déterminer alors $v_1(t)$ et $v_2(t)$ durant cette phase du mouvement.

Déterminer l'instant t_0 à partir duquel le glissement va commencer.

3) Quelles sont alors les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ durant la phase de glissement ?

3 Masse tirée par un ressort

Un solide S de masse m est initialement immobile sur un support horizontal, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce solide est attaché en B à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité A du ressort est déplacée à vitesse constante $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ ($v_0 > 0$) par un mécanisme non décrit ici.



Le solide est soumis à une force de frottement solide de coefficient statique f_s et de coefficient dynamique $f_d < f_s$ générée par son contact avec le support. Le seul mouvement possible est un mouvement de translation le long de l'axe Ox.

Les conditions initiales sont : $x_A(0) = \ell_0$ et $x_B(0) = 0$.

1) Déterminer l'instant $t_0 > 0$ au bout duquel le solide se met en mouvement.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par x_B pour $t > t_0$. On posera $\omega = \sqrt{k/m}$. Montrer que la solution de cette équation différentielle est :

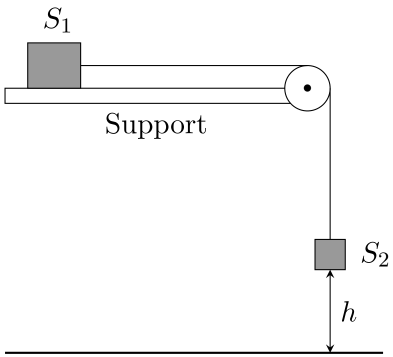
$$x_B(t) = \alpha t + \beta + A\cos[\,\omega(t - t_0)] + B\sin[\,\omega(t - t_0)]$$

et donner l'expression des constantes α et β en fonction de v_0, f_d, g et ω.

3) Compte-tenu des conditions initiales, déterminer les constantes A et B. Montrer que la phase de glissement va nécessairement s'arrêter à un instant $t_2 > t_0$.

4 Mesure d'un coefficient de frottement

Une masse M_1 est mobile sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement dynamique f_d ; elle est reliée par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse ainsi que d'une poulie de masse négligeable, pouvant tourner sans frottement autour de son axe, à une masse M_2 qui est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h au-dessus du sol qui limite sa chute.



1) Dans une première phase M_2 chute vers le sol, entraînant M_1 dans son mouvement. Appliquer le TMC à la poulie : que peut-on en déduire comme information sur les tensions exercées par le fil respectivement su M_1 et sur M_2.

À l'aide d'une méthode énergétique appliquée successivement à M_1 puis à M_2, en déduire la norme v_1 de la vitesse de M_1 au moment où M_2 touche le sol. Quelle est la distance qu'a parcouru M_1 à cet instant ?

2) M_2 est supposée s'immobiliser instantanément sur le sol, tandis que M_1 poursuit son mouvement juqu'à l'arrêt complet, en parcourant une distance d supplémentaire. Calculer d en fonction de v_1, f_d et g.

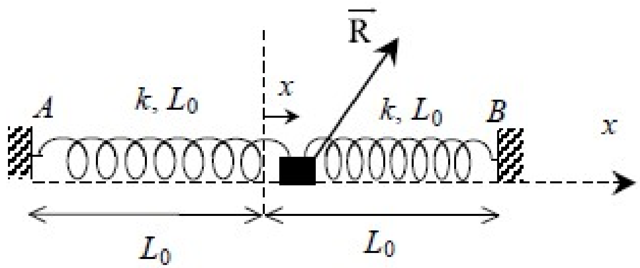
3) Montrer alors que f_d est donné par l'équation :

$$f_d = \frac{M_2}{M_1 + \frac{d}{h}(M_1 + M_2)}$$

5 Oscillateur

Un petit objet M de masse m, posé sur un plan horizontal, est relié à deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide L_0. On tient compte des frottements solides : la réaction $\overrightarrow{R}$ du support se décompose donc en une réaction normale et une réaction tangentielle liées par les lois de Coulomb.

On confondra les coefficients de frottement statique et dynamique et on notera f leur valeur commune.



1) Selon le dispositif de la figure ci-dessus, déterminer l'expression de la somme des forces élastiques exercées par les deux ressorts sur M, en fonction de k et x.

À l'instant initial $t = 0$, M est écarté d'une distance $a > 0$ par rapport à sa position d'équilibre située au milieu des points A et B. On l'abandonne ensuite sans vitesse initiale.

2) a) À quelle condition sur a le corps M peut-il se mettre en mouvement ?

b) On suppose cette condition réalisée. Déterminer l'expression de $x(t)$ pour $t > 0$ et montrer que M vient s'immobiliser en un point d'abscisse $x_1 < 0$ dont on déterminera l'expression en fonction de a, m, g et k. On appellera t_1 la date à partir de laquelle M s'immobilise.

3) a) À quelle condition sur x_1 le corps M peut-il se remettre en mouvement ?

b) On suppose cette condition réalisée. Étudier le mouvement ultérieur de M pour $t > t_1$ et montrer que ce corps vient s'immobiliser à nouveau en un point d'abscisse $x_2 > 0$ à une date qu'on désignera par t_2. Quelle est l'expression de x_2 ?

4) En poursuivant cette étude, prévoir l'évolution de $x(t)$. Tracer la courbe donnant $x(t)$ en fonction du temps. Montrer que les maxima de $x(t)$ sont alignés sur une droite de pente négative tandis que les minima sont tous alignés sur une droite de pente positive.

Comparer avec ce qui se passerait si l'objet M était soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\lambda \overrightarrow{v}$ au lieu d'un frottement solide.