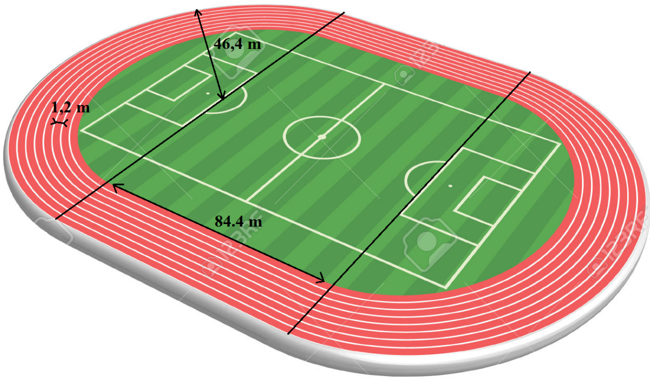
DS n°2 (CCP-e3a) - Mécanique

1 Athlétisme : le 200 m - Résolution de problème

Le 200 mètres est une épreuve d'athlétisme consistant à parcourir un demi-tour d'une piste d'athlétisme de 400 m. Il est couru au très haut niveau en moins de 20 secondes pour les hommes et 22 secondes pour les femmes. Le record du monde masculin est détenu depuis le 20 août 2009 par le Jamaïcain Usain Bolt avec 19,19 s, tandis que l'Américaine Florence Griffith-Joyner détient depuis 1988 la meilleure performance féminine avec 21,34 s.



Outre la distance, il existe une différence fondamentale entre le 200 m et le 100 m : le virage. Le virage oblige le coureur à lutter contre la force centrifuge ; il gaspille donc de l'énergie dans la direction opposée à celle vers laquelle la force centrifuge le repousse, énergie qu'il ne peut donner qu'avec un placement particulier de son pied. De ce fait, s'il veut avoir le même rendement, son temps d'appui au sol sera plus long ; son pied doit donc accélérer son mouvement, si bien que sa poussée ne sera jamais aussi parfaite qu'en ligne droite. Le virage oblige aussi le sprinteur à adapter sa musculature ; il doit être encore plus solide et gaîné et ses appuis doivent l'être également. Le virage peut aussi être à l'origine de disqualifications : le sprinteur peu attentif peut mordre le couloir d'à côté s'il est déporté par la force centrifuge ou s'il lui résiste trop.

Lors d'une course de 200 m, applications numériques à l'appui, déterminer quel est le meilleur des 8 couloirs de la piste d'athlétisme d'un point de vue théorique. Est-ce le cas en pratique ?

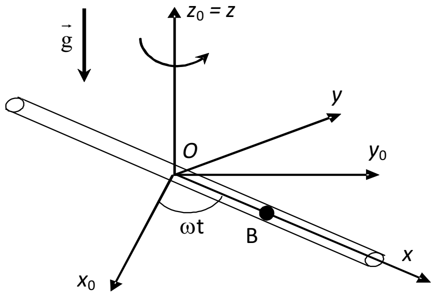
Données sur la piste d'athlétisme :
— largeur d'un couloir : 1,2 m
— longueur de la ligne droite : 84 m
— rayon de courbure de la piste extérieur : 46,4 m

2 Bille dans un tube en rotation

Dans tout le problème, le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_0$) est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace ($Ox_0y_0z_0$) de vecteurs unitaires ($\overrightarrow{e}_{x_0}$, $\overrightarrow{e}_{y_0}$, $\overrightarrow{e}_{z_0}$) et tel que Oz_0 soit la verticale ascendante. On notera $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e}_{z_0}$ l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme et dirigée selon la verticale descendante.

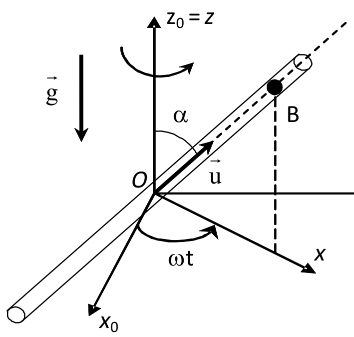
On envisage différentes situations d'une bille B, de masse m, quasi-ponctuelle, susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique mince (T), de longueur 2ℓ.

Le tube effectue divers mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe dans ($\mathcal{R}_0$) et passant par son centre O. Le mouvement de la bille dans le tube a lieu sans frottements.



1. Le tube (T) est dans le plan horizontal (x_0Oy_0) et tourne autour de l'axe (Oz_0) à la vitesse angulaire constante ω. On définit le repère tournant ($Oxyz$) lié au tube, tel que $Oz = Oz_0$ et $(Ox_0, Ox) = \omega t$.
   La position de B dans le tube est repérée par $\overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{e}_x$. À l'instant initial, la position et la vitesse de la bille dans le référentiel du tube (T) sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.
   a) On note $\overrightarrow{N}$ la réaction exercée par le tube sur la bille B. Faire un bilan des forcées exercées sur la bille B dans le référentiel du tube (T) et donner les projections de toutes les forces sur les vecteurs de la base ($\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$) attachée à ($Oxyz$).
   b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du tube, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit :
   $$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$
   Intégrer cette équation compte tenu des conditions initiales et déterminer le temps τ que mettra la bille pour sortir du tube.
   c) Déterminer l'expression de la réaction $\overrightarrow{N}$ et commenter le résultat.

2. Le tube (T) tourne à présent autour de l'axe (Oz_0) avec une inclinaison α constante par rapport à la verticale, à la vitesse angulaire constante ω.
   On étudie le mouvement de la bille B dans le référentiel du tube muni du repère tournant ($Oxyz$) défini à la question 1). Dans ce repère, le tube est immobile dans le plan (Oxz).
   La position de la bille B dans le tube est repérée par $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ représente le vecteur unitaire directeur du tube.



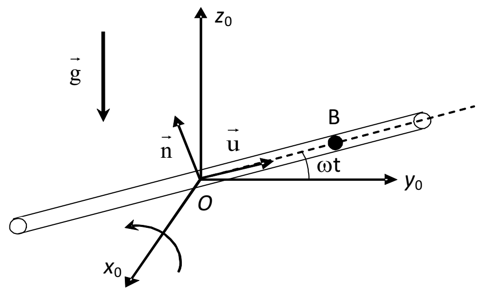
   a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de pesanteur en fonction de r.
   b) Calculer la force d'inertie d'entraînement exercée sur B, calculer le travail élémentaire δW reçu par la bille lorsqu'elle se déplace de $dx\overrightarrow{e}_x$ alors que le tube est en rotation, et en déduire que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle suivante : $E_{p_{ie}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.
   c) Le système est-il conservatif ? Justifier la réponse.
   d) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la bille en fonction de r, m, g, α et ω.

e) En déduire que la nouvelle équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit :

$$\ddot{r} - (\omega \sin\alpha)^2 r = -g\cos\alpha$$

f) Déterminer les positions d'équilibre de B dans le référentiel du tube et étudier la stabilité de ces positions.

3. On étudie une dernière configuration dans laquelle le tube (T) reste dans le plan vertical (Oy_0z_0) et tourne à vitesse angulaire ω constante autour l'axe (Ox_0).
On introduit le vecteur $\overrightarrow{u}$ (vecteur unitaire directeur du tube) tel que $(Oy_0, \overrightarrow{u}) = \omega t$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, de telle sorte que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{e}_{x_0})$ soit une base orthonormée directe.
On veut étudier le mouvement de la bille B dans le référentiel du tube muni du repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{e}_{x_0})$. La position de B dans le tube est donc repérée par $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{u}$. À l'instant initial, la position et la vitesse de B dans le référentiel du tube sont $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = v_0$.



a) Faire un bilan des forces exercées sur la bille B dans le référentiel du tube et donner les projections de toutes les forces sur les vecteurs de la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{e}_{x_0})$.

b) En déduire que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit maintenant :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin(\omega t)$$

c) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

d) Existe-t-il une position d'équilibre de la bille par rapport au tube ? À quelle condition le mouvement est-il rectiligne sinusoïdal dans le référentiel du tube ? Décrire le mouvement de B lorsque les conditions initiales sont liées de la manière suivante : $v_0 = \dfrac{g}{2\omega} - \omega r_0$.

3 Satellite terrestre

La Terre est assimilée à une boule de centre O et de masse M_T. Les mouvements des objets sont étudiés dans le Référentiel Géocentrique $(R_{géo})$ qui sera supposé galiléen. Dans tout le problème, on désignera par G la constante universelle de la gravitation.

I. Relations générales

Un objet ponctuel M de masse m est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre et on suppose que c'est la seule force qui agit sur celui-ci.

1. Donner l'expression vectorielle $\overrightarrow{F}_g$ de cette force et montrer qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p dont on donnera l'expression en fonction de la distance r entre M et O.
2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ de M par rapport au centre de la Terre est conservé. Que peut-on en déduire ?

Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) et on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. On notera dans la suite $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire associée.

3. Montrer que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Dans la suite, cette constante sera appelée *constante des aires*. Que représente physiquement C ?

Dans les questions qui suivent, on suppose que M a un mouvement circulaire de rayon R autour de O.

4. Exprimer la vitesse v_C de M pour ce mouvement en fonction de G, M_T et R. En déduire son énergie cinétique E_c.
5. Quelle est alors la période T de révolution de M autour de O ? Établir la troisième loi de Kepler qui relie T au rayon R de l'orbite.
6. Montrer que l'énergie mécanique E_m pour ce mouvement circulaire s'écrit $E_m = -\dfrac{GmM_T}{2R}$

II. Étude d'une trajectoire elliptique

*Le point M représente un satellite terrestre et on suppose désormais que sa trajectoire dans le plan (Oxy) est elliptique. La distance $r = OM$ varie en fonction de l'angle polaire θ et on appelle **apogée** le point A de l'ellipse le plus éloigné de O et **périgée** le point P le plus proche de O. On note respectivement r_A et r_P les distances OA et OP.*

Pour la suite on posera $a = \dfrac{r_A + r_P}{2}$ (longueur du demi-grand axe de l'ellipse) et on admettra que, par généralisation du résultat de la question 6., l'énergie mécanique de M s'écrit :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$$

7. On suppose que lors de son passage au point A, à la distance r_A du centre de la terre, M possède une vitesse $v_A = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{9r_A}}$.
   a) À l'aide d'un raisonnement énergétique, expliciter la longueur a du demi grand - axe de la trajectoire en fonction de r_A.
   b) Lorsque le satellite passe en P à la distance r_P de O, sa vitesse (en norme) est v_P. En utilisant la conservation du moment cinétique déterminer numériquement les rapports r_P/r_A et v_P/v_A.

8. Arrivé au périgée P, l'équipage allume un moteur qui a pour effet de séparer le satellite en deux parties. La cabine (partie avant) de masse $m/2$ est expulsée et ramène l'équipage vers la Terre. La partie arrière, de masse $m/2$, est mise en orbite circulaire de centre O et de rayon r_P pour constituer une station d'observation. On note $\vec{v}_{cab}$ et $\vec{v}_{stat}$ les vitesses respectives de la cabine et de la station juste après séparation : ces vitesses ont même direction et même sens que $\vec{v}_P$.
   a) La station ayant une trajectoire circulaire, quelle est l'expression de v_{stat} en fonction de G, M_T et r_P ?
   b) La séparation du satellite se faisant en un temps très court, il y a conservation de la quantité de mouvement totale station + cabine. En déduire la vitesse v_{cab} de la cabine juste après la séparation et l'exprimer en fonction de G, M_T et r_P.
   c) Quelle est alors la nature de la trajectoire de la cabine après séparation ?

III. Passage dans la ceinture de Van Allen

Nous considérons à nouveau un satellite M de masse m sur une trajectoire elliptique. Le périgée P de la trajectoire est situé à la distance $r_P = 6\ 870$ km et l'apogée A se situe sur l'orbite géostationnaire $r_A = 42\ 370$ km. Au cours d'une révolution, le satellite passe dans la ceinture de Van Allen. C'est une ceinture comprise entre deux sphères comprises de rayon $R_1 = 8\ 400$ km et $R_2 = 28\ 000$ km et dont les centres coïncident avec celui de la Terre. Cette ceinture est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre qui perturbent les détecteurs du satellite et interrompent donc ses observations.

9. Faire un schéma de la trajectoire du satellite et de la ceinture de Van Allen.

Dans le système des coordonnées polaires, la trajectoire elliptique est caractérisée par une équation qui donne la distance $r = OM$ en fonction de l'angle polaire θ :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

dans laquelle p et e sont deux paramètres constants appelés respectivement ***paramètre*** *et* ***excentricité****.*

10. Donner les expressions de r_A et r_P en fonction de p et e. En déduire que :

$$p = \frac{2\,r_A r_P}{r_A + r_P} \quad \text{et} \quad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

11. Déterminer les valeurs θ_1 et θ_2 correspondant à l'entrée et à la sortie du satellite pour un passage dans la ceinture de Van Allen. Application numérique : calculer les valeurs de ces angles en degrés.
12. Soit A l'aire balayée par le vecteur position lors d'un passage dans la ceinture. Quelle est la relation entre A, la constante des aires C et la durée Δt nécessaire pour balayer cette aire ? En déduire le rapport $\rho = \Delta t/T$ (T période de révolution) en fonction de A et de la surface totale S de l'ellipse.

    On donne : $A = 200{\times}10^6$ km^2 et $S = \dfrac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quel est le pourcentage d'activité du satellite sur une période T ?