Correction - DS n°2bis (Centrale - Mines) - Mécanique

1 Athlétisme : le 200 m - Résolution de problème

L'expression de la force centrifuge ressentie par les coureurs est dirigée vers l'extérieur du virage et a pour norme :

$$F_{ie} = m\Omega_0^2 R$$

où m est la masse du coureur, R est le rayon de courbure de la trajectoire, qui dépend du couloir dans lequel il coure. Ω_0 est la vitesse angulaire du coureur, supposée uniforme pour simplifier, de sorte que $\Omega_0 \simeq \frac{v_0}{R}$, où v_0 est la vitesse de la course.

On peut estimer les grandeurs :

- v_0 par la vitesse moyenne sur l'ensemble de la course $v_0 \simeq \frac{L}{\Delta t} \simeq \frac{200}{20} = 10 \text{ m.s}^{-1}$, soit 36 km.h^{-1} .
- $m \simeq 100 \text{ kg}$
- le rayons des couloirs extrêmes : $R_8 = 46,4 - 0,6 = 45,8 \text{ m}$ à l'extérieur et $R_1 = 45,8 - 7 \times 1,2 = 37,4 \text{ m}$ à l'intérieur.

Finalement, on peut estimer les forces centrifuges dans chacun des deux couloirs extrêmes :

$$F_{ie,1} = m \frac{v_0^2}{R_1} \simeq 270 \text{ N}$$

$$F_{ie,8} = m \frac{v_0^2}{R_8} \simeq 220 \text{ N}$$

On peut tout d'abord dire que ces forces sont très importantes puisqu'elles correspondent respectivement à des masses de 27 et 22 kg tirant le coureur vers l'extérieur ! Par ailleurs, la différence entre ces deux couloirs n'est pas du tout négligeable (environ 20% d'écart), et il est donc préférable de courir dans le couloir extérieur.

Le record du monde du 400 mètres est actuellement détenu, pour les hommes, par le sud-africain Wayde van Niekerk, avec un temps de 43,03 s, établi le 14 août 2016 lors des JO de Rio de Janeiro. Il était dans le couloir extérieur 8...

Cependant, comme les compétiteurs partent décalés dans les couloirs (cf photo) afin qu'ils parcourent la même distance jusqu'à la ligne d'arrivée, le coureur extérieur doit faire tout le début de course seul en tête. Les "poursuivants" ont donc un léger avantage puisqu'ils peuvent gérer leurs efforts en fonction des coureurs devant eux.

En pratique, ces deux effets antagonistes, physiques et psychologiques, font que les meilleurs couloirs sont ceux du centre de la piste.

2 Mécanique terrestre

I. Champ de pesanteur terrestre

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations.

a) Le point A est fixe dans (R_T) . Une loi de composition des vitesses conduit donc à :

$$\vec{v}_{A/R_G} = \vec{v}_{A/R_T} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

En dérivant cette relation dans (R_G) , nous obtenons (la rotation étant uniforme, $\vec{\omega}$ est constant) :

$$\vec{a}_{A/R_G} = \left[\frac{d(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})}{dt} \right]_{R_G} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{A/R_G} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$$

b) Le vecteur $\vec{\omega}$ étant constant, l'accélération d'entraînement s'écrit donc :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{A/R_G} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM})$$

En utilisant deux fois la factorisation de $\vec{\omega}$ dans les produits vectoriels, on obtient le résultat cherché :

$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}]) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}$$

c) On utilise $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ et le fait que $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont deux vecteurs colinéaires. Il faut ensuite utiliser la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}) = [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{HM}] \vec{\omega} - [\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}] \overrightarrow{HM}$$

donc :

$$\boxed{\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

2. Il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel terrestre (R_T) non galiléen, en tenant compte des forces d'inertie.

$$m \vec{a}_{M/R_T} = -m g_0 \vec{u}_z + m \omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T}$$

En regroupant les deux premiers termes, on peut introduire le vecteur :

$$\boxed{\vec{g} = -g_0 \vec{u}_z + \omega^2 \overrightarrow{HM}}$$

ce qui donne le résultat.

3. a) On projette : $\overrightarrow{HA} = R \cos(\lambda) [\cos(\lambda) \vec{u}_z - \sin(\lambda) \vec{u}_y]$ d'où le résultat :

$$\begin{cases} g_x &= 0 \\ g_y &= -\omega^2 R \cos(\lambda) \sin(\lambda) \\ g_z &= -g_0 + \omega^2 R \cos^2(\lambda) \end{cases}$$

b)

$$\boxed{\tan \alpha = \left| \frac{g_y}{g_z} \right| = \frac{\omega^2 R \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{g_0 - \omega^2 R \cos^2(\lambda)}}$$

Application numérique : $g_0 = 9,799 \text{ m.s}^{-2}$. Pour $\lambda = 45^\circ$, on trouve : $\alpha = 0,099^\circ$, ce qui est négligeable.

4. Au Pôle, $\lambda = \pi/2$ et $g_{\text{pôle}} = g_0 \approx 9,799 \text{ m.s}^{-2}$. À l'équateur, $\lambda = 0$ d'où : $g_{\text{équateur}} = g_0 - \omega^2 R = 9,765 \text{ m.s}^{-2}$. La différence est :

$$\boxed{\Delta g = \omega^2 R = 33,9 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}}$$

La différence observée avec la valeur réelle est due à la non-rotundité de la Terre (aplatissement aux Pôles).

II. Pendule de Foucault

5. $\vec{T} = T \vec{u}_{MB}$ où $\vec{u}_{MB}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MB}$. En notant que : $\|\overrightarrow{MB}\| = L$, nous obtenons :

$$\boxed{\vec{T} = T \frac{\overrightarrow{MB}}{L}}$$

6. a) Dans le repère $(Axyz)$, le vecteur vitesse de M par rapport au référentiel terrestre s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R_T} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

d'où :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T} = -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}$$

En projetant le principe fondamental de la dynamique sur les trois axes du repère, nous obtenons :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -T \frac{x}{L} - 2m\omega (\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ m \ddot{y} = -T \frac{y}{L} - 2m\omega \dot{x} \sin \lambda \\ m \ddot{z} = -mg + T \frac{L-z}{L} + 2m\omega \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

b) En négligeant ces termes, la troisième équation devient : $T \approx mg$, ce qui donne bien les deux équations de l'énoncé (obtenue en négligeant $2m\omega \dot{z} \cos \lambda$ dans la première équation).

c) $\omega_0 = 0,81 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\Omega = 5,2 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$

7. Avec $u = x + iy$ nous aboutissons à :

$$\boxed{\ddot{u} + 2i\Omega \dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique vaut : $\Delta = -4\Omega^2 - 4\omega_0^2 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :

$$r_{\pm} = -i\Omega \pm i\sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$$

d'où :

$$u(t) = \exp(-i\Omega t) \left[A \exp\left(i\sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} t\right) + B \exp\left(-i\sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} t\right) \right]$$

Remarque : comme $\Omega \ll \omega_0$, on peut se contenter d'expressions approchées, qui s'écrivent :

$$r_+ = i(\omega_0 - \Omega) \quad \text{et} \quad r_- = -i(\omega_0 + \Omega)$$

d'où, finalement :

$$\boxed{u(t) = \exp(-i\Omega t) [A \exp(i\omega_0 t) + B \exp(-i\omega_0 t)]}$$

8. a) On voit que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} \\ &= x' [\cos(\Omega t) \vec{u}_x - \sin(\Omega t) \vec{u}_y] + y' [\sin(\Omega t) \vec{u}_x + \cos(\Omega t) \vec{u}_y] \\ &= [x' \cos(\Omega t) + y' \sin(\Omega t)] \vec{u}_x + [-x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t)] \vec{u}_y\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\overrightarrow{AM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$ et que la décomposition d'un vecteur sur une base est unique, nous obtenons :

$$\begin{cases} x &= x' \cos(\Omega t) + y' \sin(\Omega t) \\ y &= -x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned}u = x + iy &= x' [\cos(\Omega t) - i \sin(\Omega t)] + iy' [\cos(\Omega t) - i \sin(\Omega t)] \\ &= (x' + iy') \exp(-i\Omega t) \\ &= u'(t) \exp(-i\Omega t)\end{aligned}$$

b) À l'instant $t = 0$: $u(0) = x_0 = A$ et $\dot{u}(0) = (\omega_0 - \Omega)A - (\omega_0 + \Omega)B = 0$. Nous obtenons donc :

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = x_0 \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0 + \Omega}$$

et donc :

$$u(t) = x_0 \exp(-i\Omega t) \left[\exp(i\omega_0 t) + \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0 + \Omega} \exp(-i\omega_0 t) \right]$$

En tenant compte de la relation $u(t) = u'(t) \exp(-i\Omega t)$, nous obtenons :

$$u'(t) = x_0 \left[\exp(i\omega_0 t) + \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0 + \Omega} \exp(-i\omega_0 t) \right]$$

On en déduit que :

$$x'(t) = \text{Re } u'(t) = x_0 \frac{2\omega_0}{\omega_0 + \Omega} \cos(\omega_0 t)$$

et

$$y'(t) = \text{Im } u'(t) = x_0 \frac{2\Omega}{\omega_0 + \Omega} \sin(\omega_0 t)$$

c) L'élimination du temps dans les équations horaires conduit à :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

ce qui est l'équation d'une *ellipse* dont la demi-longueur du grand axe est a et celle du petit axe est b . Comme $b/a = \Omega/\omega_0 = 6,4 \times 10^{-5}$. On remarque donc que cette ellipse est quasiment réduite à un segment de droite.

En pratique, le pendule oscille quasiment uniquement selon x' et nous aurons :

$$x'(t) = x_0 \frac{2\omega_0}{\omega_0 + \Omega} \cos(\omega_0 t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y'(t) \approx 0$$

D'autre part, la pulsation des oscillations est, sans aucune approximation selon la question 7., $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$, d'où :

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \omega_0}{\omega_0} = 2,1 \times 10^{-9}$$

L'écart n'est donc pas mesurable et $\omega_1 = \omega_0$.

9. Il vient immédiatement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad T_R = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Application numérique : $T_0 = 7,8$ s et $T_R = 1,22 \times 10^5$ s $\approx$ 33h 50 min.

III. Déviation vers l'Est

10. Il suffit de reprendre les équations obtenues à la question 6. a), sans la tension du fil, à savoir, après simplification par la masse m :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

11. Une première intégration de ces équations donne, compte-tenu de la vitesse initiale nulle :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega(z \cos \lambda - y \sin \lambda) + 2\omega L \cos \lambda \\ \dot{y} = -2\omega x \sin \lambda \\ \dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \lambda \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans la première série d'équations de la question 10. et en négligeant tous les termes en ω^2 , il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega g t \cos \lambda \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Compte-tenu des conditions initiales, ces équations s'intègrent en :

$$\begin{cases} x = \frac{\omega g}{3} \cos \lambda t^3 \\ y = 0 \\ z = -\frac{g}{2} t^2 + L \end{cases}$$

12. La particule arrive sur le sol à l'instant t_1 tel que $z(t_1) = 0$, ce qui donne :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \implies x(t_1) = \frac{2L\omega}{3} \sqrt{\frac{2L}{g}} \cos \lambda$$

Application numérique : $x(t_1) = 4,4$ cm. C'est une déviation extrêmement faible en regard de la hauteur de chute. La mesurer nécessite donc des conditions expérimentales très rigoureuses et très précises, en évitant toutes les perturbations comme le vent, ou la résistance de l'air, ou encore des conditions initiales où la vitesse ne serait pas rigoureusement nulle.

3 Freinage d'un lingot

1. $\vec{v}_{S/R_T} = \dot{x} \vec{e}_x$ et $\vec{v}_{I_1/R_T} = r\omega_1 \vec{e}_x$ puisque I_1 a un mouvement circulaire autour de O_1 . La vitesse de glissement s'écrit donc :

$$\vec{v}_g(1) = (\dot{x} - r\omega_1) \vec{e}_x$$

Lorsque le contact est sans glissement : $\vec{v}_g(1) = \vec{0}$, ce qui impose la relation :

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}}{r}$$

On a donc $\dot{x} > 0$, et le déplacement du lingot se fait vers la droite, ce qui est bien cohérent.

2. Le rouleau n°2 ayant un mouvement de rotation en sens inverse du rouleau n°1, $\vec{v}_{I_2/R_T} = -r\omega_2 \vec{e}_x$. Nous en déduisons la vitesse de glissement :

$$\vec{v}_g(2) = (\dot{x} + r\omega_2) \vec{e}_x$$

3. Comme $\dot{x} > 0$ et $\omega_2 > 0$, on remarque que $\vec{v}_g(2)$ est dirigée selon $+\vec{e}_x$. D'après les lois de Coulomb du frottement solide, la composante tangentielle de la réaction $\vec{R}_2$ doit être en sens opposé, d'où : $T_2 < 0$. D'autre part, $|T_2| = f |N_2|$ ce qui implique :

$$T_2 = -f N_2$$

4. Le principe fondamental appliqué à S dans (R_T) galiléen s'écrit :

$$M\ddot{x} \vec{e}_x = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + M\vec{g}$$

ce qui donne, en projection sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$M\ddot{x} = T_1 + T_2 \quad \text{et} \quad 0 = N_1 + N_2 - Mg$$

5. Le rouleau n°1 est soumis à son poids $\vec{P}_1$ appliqué en O_1 , à l'action de la liaison pivot parfaite, dont le moment en O_1 est nul et à l'action de S, c'est à dire $-\vec{R}_1 = -T_1 \vec{e}_x - N_1 \vec{e}_y$ (action et réaction), appliquée en I_1 . Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}_1) + \vec{M}_{O_1}(\text{Pivot}) + \vec{M}_{O_1}(-\vec{R}_1) = \overrightarrow{O_1 I_1} \wedge (-T_1 \vec{e}_x - N_1 \vec{e}_y)$$

Comme $\vec{L}_{O_1} = -J\omega_1 \vec{e}_z$ (attention au signe!) , nous en déduisons :

$$-J \frac{d\omega_1}{dt} \vec{e}_z = r \vec{e}_y \wedge (-T_1 \vec{e}_x - N_1 \vec{e}_y) = r T_1 \vec{e}_z$$

donc :

$$J \frac{d\omega_1}{dt} = -r T_1$$

Lorsqu'il y a glissement au niveau du premier rouleau (la vitesse de glissement est dirigée selon $-\vec{e}_x$, donc $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_x$ est dirigée dans le sens opposé), alors $T_1 > 0$. On peut donc en déduire que $J \frac{d\omega_1}{dt} < 0$ et donc que la vitesse de rotation du premier rouleau diminue - il est freiné - ce qui est bien cohérent.

6. Les forces extérieures appliquées à S sont le poids $\vec{P} = M\vec{g}$ appliqué en G et les deux réactions $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, respectivement appliquées en I_1 et I_2 . La relation donnée dans l'énoncé se traduit par :

$$\overrightarrow{GI_1} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GI_1} \wedge (T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y) + \overrightarrow{GI_2} \wedge (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) = \vec{0}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} \ell - x - 2d \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell - x \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ce qui donne :

$$(\ell - x - 2d) N_1 + h T_1 + (\ell - x) N_2 + h T_2 = 0$$

Après regroupement des termes, on retrouve donc bien le résultat proposé par l'énoncé.

7. Écrivons successivement :

$$T_1 = \frac{-J\ddot{x}}{r^2} \text{ puis } T_2 = M\ddot{x} - T_1 = M\ddot{x} + \frac{J\ddot{x}}{r^2} = \left(M + \frac{J}{r^2}\right) \ddot{x}$$

D'autre part, la relation obtenue à la question 6. s'écrit aussi :

$$h M\ddot{x} + (\ell - x) Mg = 2d N_1 = 2d(Mg - N_2) = 2d \left(Mg + \frac{T_2}{f}\right)$$

En multipliant toute cette équation par $f/2d$ et en substituant T_2 , nous obtenons l'équation différentielle de l'énoncé.

8. Nous obtenons :

$$\Omega = \sqrt{\frac{fMg}{2d \left(M + \frac{J}{r^2} - M \frac{fh}{2d}\right)}} = 0,736 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } C = \ell - 2d = -0,60 \text{ m}$$

9. Compte-tenu de l'expression de C , la solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$x(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) + \ell - 2d$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x} = v_0$ conduisent alors à :

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) + (\ell - 2d) [1 - \cos(\Omega t)]$$

d'où :

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\Omega t) + (\ell - 2d) \Omega \sin(\Omega t)$$

qui s'annule pour $t = \tau$ tel que :

$$\boxed{\tan(\Omega\tau) = \frac{v_0}{\Omega(2d - \ell)}}$$

10. Applications numériques : $\tan(\Omega\tau) = 1,00$ donc $\tau = 1,07$ s. On en déduit : $x_m = x(\tau) = 24,9$ cm. Nous remarquons que $x_m < 2(\ell - d) = 40$ cm : le solide S est donc, à l'instant de l'arrêt, toujours en contact avec le rouleau n°1.

11. Reprenons les équations du mouvement :

$$\boxed{N_2 = -\frac{T_2}{f} = -\left(\frac{M + \frac{J}{r^2}}{f}\right) \ddot{x} = \left(\frac{M + \frac{J}{r^2}}{f}\right) \Omega^2 (x - \ell + 2d)}$$

et

$$N_1 = Mg - N_2 = Mg + \left(\frac{M + \frac{J}{r^2}}{f} \right) \Omega^2 (\ell - 2d - x)$$

On vérifie bien que N_1 est une fonction décroissante de x et que N_2 est une fonction croissante de x . La valeur minimale de N_1 est obtenue en x_m tandis que la valeur minimale de N_2 est obtenue en $x = 0$. On calcule :

$$N_{1\min} = N_1(x_m) = Mg + \left(\frac{M + \frac{J}{r^2}}{f} \right) \Omega^2 (\ell - 2d - x_m) = 5,60 \times 10^4 \text{ N} > 0$$

et

$$N_{2\min} = N_2(x = 0) = \left(\frac{M + \frac{J}{r^2}}{f} \right) \Omega^2 (2d - \ell) = 2,17 \times 10^4 \text{ N} > 0$$

N_1 et N_2 ne s'annulant jamais, les contacts de S avec les rouleaux n°1 et 2 ne sont pas rompus entre $t = 0$ et $t = \tau$.