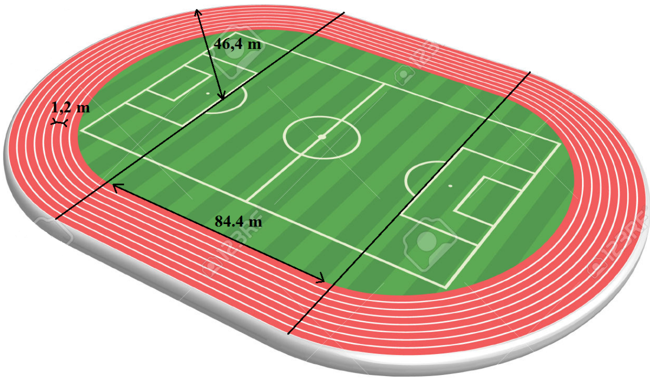
DS n°2bis (Centrale - Mines) - Mécanique

1 Athlétisme : le 200 m - Résolution de problème

Le 200 mètres est une épreuve d'athlétisme consistant à parcourir un demi-tour d'une piste d'athlétisme de 400 m. Il est couru au très haut niveau en moins de 20 secondes pour les hommes et 22 secondes pour les femmes. Le record du monde masculin est détenu depuis le 20 août 2009 par le Jamaïcain Usain Bolt avec 19,19 s, tandis que l'Américaine Florence Griffith-Joyner détient depuis 1988 la meilleure performance féminine avec 21,34 s.



Outre la distance, il existe une différence fondamentale entre le 200 m et le 100 m : le virage. Le virage oblige le coureur à lutter contre la force centrifuge ; il gaspille donc de l'énergie dans la direction opposée à celle vers laquelle la force centrifuge le repousse, énergie qu'il ne peut donner qu'avec un placement particulier de son pied. De ce fait, s'il veut avoir le même rendement, son temps d'appui au sol sera plus long ; son pied doit donc accélérer son mouvement, si bien que sa poussée ne sera jamais aussi parfaite qu'en ligne droite. Le virage oblige aussi le sprinteur à adapter sa musculature ; il doit être encore plus solide et gaîné et ses appuis doivent l'être également. Le virage peut aussi être à l'origine de disqualifications : le sprinteur peu attentif peut mordre le couloir d'à côté s'il est déporté par la force centrifuge ou s'il lui résiste trop.

Lors d'une course de 200 m, applications numériques à l'appui, déterminer quel est le meilleur des 8 couloirs de la piste d'athlétisme d'un point de vue théorique. Est-ce le cas en pratique ?

Données sur la piste d'athlétisme :
— largeur d'un couloir : 1,2 m
— longueur de la ligne droite : 84 m
— rayon de courbure de la piste extérieur : 46,4 m

2 Mécanique Terrestre

Données :
La Terre est assimilée à une boule homogène de centre O et de rayon $R = 6{,}38.10^3\,km$.
Constante universelle de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.
Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24} kg$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles : $\omega = 7{,}29.10^{-5}\,rad.s^{-1}$

Le référentiel géocentrique (R_G) est supposé galiléen et on le munit du repère $(OXYZ)$. Par rapport à celui-ci, le référentiel terrestre (R_T) est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles SN, fixe dans (R_G), avec une vitesse angulaire ω. (R_T) est muni d'un repère $(Axyz)$ où A est un point de la surface terrestre situé à la latitude λ (Figure 1). Ax est tangent au parallèle et dirigé vers l'Est, Ay est tangent au méridien et dirigé vers le Nord et Az est vertical et dirigé vers le haut. On désigne par $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ les trois vecteurs unitaires associés aux trois axes Ax, Ay et Az.

Le vecteur rotation de (R_T) par rapport à (R_G) est $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_Z$ et il sera supposé constant dans tout le problème.

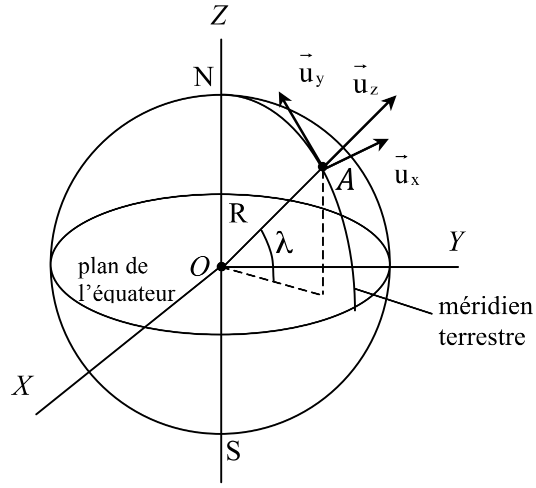


Figure 1

Dans tout le problème, on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre (R_T). Ce point est repéré par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) relativement au repère $(Axyz)$. Le projeté de M sur l'axe de rotation SN sera noté H.

Le point M reste suffisamment proche de la surface terrestre pour que le champ de gravitation terrestre puisse s'écrire en première approximation ($OM \approx R$) :

$$\vec{G}_T = -\,G\,\frac{M_T}{R^2}\,\vec{u}_z, \text{ que l'on notera } -g_0\,\vec{u}_z$$

I. Champ de pesanteur terrestre

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations.
   a) Montrer à l'aide des lois de composition des vitesses et des accélérations que $\vec{v}_{A/R_G} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$ et que $\vec{a}_{A/R_G} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA})$.
   b) À partir de la relation générale donnant l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ en un point mobile M, montrer que celle ci peut aussi se mettre sous la forme : $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$.
   c) Montrer alors que $\vec{a}_e$ peut aussi s'écrire : $\vec{a}_e = -\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation OZ.
2. Montrer que lorsque le point M est uniquement soumis à la force de gravitation, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans (R_T) :

$$m\,\vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} - 2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T}$$

   où $\vec{g}$ est un vecteur que l'on explicitera en fonction de $g_0\,\vec{u}_z$, ω et $\overrightarrow{HM}$.

*Dans la suite, on ne considérera que des points très proches de la surface terrestre, de sorte à pouvoir confondre les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HA}$. La grandeur $\vec{g}$ représente **l'accélération de la pesanteur** mesurée dans le référentiel terrestre, au voisinage du point A.*

3. Étude de $\vec{g}$.
   a) Expliciter les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de g_0, ω, λ et R. Application numérique, calculer g_y et g_z.
   b) Soit α l'angle entre $\overrightarrow{g_0}$ et $\vec{g}$. Déterminer $\tan\alpha$ en fonction de g_0, ω, λ et R. Application numérique : calculer α à la latitude $\lambda = 45°$ nord. Que peut-on en conclure ?
4. Donner l'expression de $\Delta g = g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}}$, différence des normes de l'accélération de la pesanteur au pôle et à l'équateur. Calculer la valeur numérique de Δg. En réalité, on mesure $\Delta g = 52.10^{-3} m.s^{-2}$; proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

Compte tenu des valeurs numériques calculées, on admettra par la suite que les composantes de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont $(0, 0, -g)$ avec $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

II. Pendule de Foucault

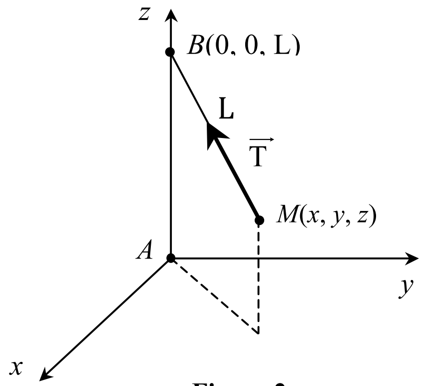


Figure 2

Le pendule de Foucault est un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur L suspendu à un point B de sorte que $\overrightarrow{AB} = L\,\vec{u}_z$. À l'autre bout du fil, on attache un petit objet M de masse m (Figure 2).

5. Déterminer la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur M en fonction de sa norme T, du vecteur $\overrightarrow{MB}$ et de L.
6. a) Établir les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M dans le référentiel terrestre (R_T).

   Dans la suite du problème, on étudie les petites oscillations au voisinage de A, ce qui suppose que $z \approx 0$, $\dot{z} \approx 0$ et $\ddot{z} \approx 0$. On supposera en outre que $|\,2\omega\cos\lambda\,\dot{x}\,| \ll g$.

   b) Montrer que les équations différentielles vérifiées par x et y s'écrivent de façon approchée :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} - 2\omega\sin\lambda\,\dot{y} + \dfrac{g}{L}\,x & = & 0 \\[2ex] \ddot{y} + 2\omega\sin\lambda\,\dot{x} + \dfrac{g}{L}\,y & = & 0 \end{array}\right.$$
   Dans la suite, on posera $\omega_0^2 = g/L$ et $\Omega = \omega\sin\lambda$.

   c) Calculer les valeurs numériques de ω_0 et Ω pour un pendule situé à la latitude $\lambda = 45°$ et avec $L = 15\ m$.

7. Afin de résoudre ce système d'équations couplées, on définit la fonction complexe $u = x + iy$ (avec $i^2 = -1$). Déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit u. En déduire sa solution générale (on introduira deux constantes d'intégration sans chercher à les calculer pour le moment).

8. On désire obtenir les équations du mouvement dans le repère tournant $(Ax'y'z')$, d'axe Az' confondu avec Az et tournant autour de Az dans le sens des aiguilles d'une montre à la vitesse angulaire constante $\Omega = \omega \sin \lambda$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ les deux repères sont confondus, de sorte que l'angle $(\vec{u}_x, \vec{u}_{x'}) = \Omega t$ (Figure 3).

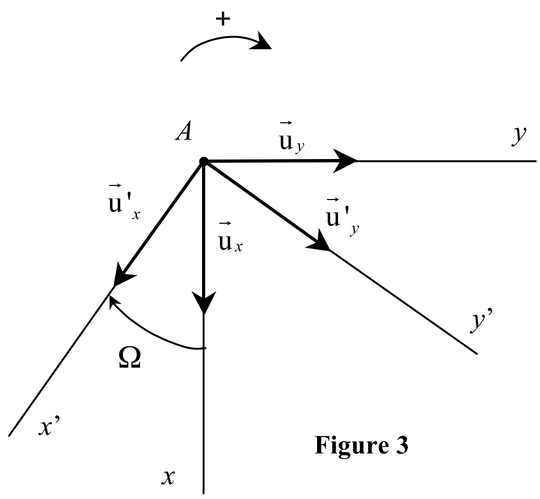


Figure 3

a) (x, y) étant les coordonnées du point M dans $(Axyz)$ et (x', y') les coordonnées de ce même point dans le repère $(Ax'y'z')$, on pose $u' = x' + iy'$. Montrer que : $u(t) = u'(t) \exp(-i\Omega t)$.

b) On suppose que la masse oscillante M est abandonnée sans vitesse initiale dans la position M_0 de coordonnées $(x_0 > 0, y_0 = 0)$. Montrer que :

$$x'(t) = a \cos(\omega_1 t) \text{ et } y'(t) = b \sin(\omega_1 t)$$

en déterminant les constantes a, b et ω_1.

c) Quelle est la nature de la trajectoire dans le plan $(Ax'y')$? Calculer numériquement le rapport b/a ainsi que l'écart relatif $|\omega_1 - \omega_0|/\omega_0$ à la latitude $\lambda = 45°$ nord, avec $L = 15\ m$. Que peut-on en conclure ?

9. Les équations précédentes peuvent s'interpréter comme décrivant un pendule oscillant avec une période T_0 dans un plan (P) qui tourne autour de l'axe Az avec une période T_R. Déterminer T_0 ainsi que la durée T_R d'une rotation complète de ce plan d'oscillations. Application numérique : calculer T_R en un lieu de latitude $\lambda = 45°$ nord avec $L = 15\ m$.

III. Déviation vers l'Est

On étudie maintenant le mouvement du point M lorsqu'il tombe en chute libre, sans vitesse initiale, à partir du point $B(0, 0, L)$.

10. Déterminer en fonction de g, ω et λ les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M dans le repère $(Axyz)$.

Comme ω est petite, il est possible d'étudier le phénomène « à l'ordre 1 en ω », c'est à dire en négligeant dans les équations tous les termes proportionnels à ω^2 ou à des puissances supérieures à 2.

11. Résoudre dans cette approximation les équations différentielles obtenues à la question précédente en montrant que :

$$x(t) = at^3 \quad y(t) = 0 \quad z(t) = bt^2 + L$$

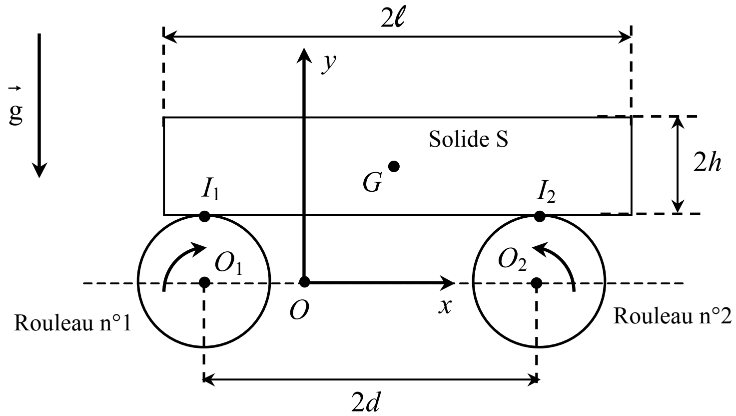
où a et b sont deux constantes à expliciter en fonction de g, ω et λ.

12. En déduire que dans l'hémisphère Nord la particule tombe sur le sol en étant déviée d'une quantité x_1 vers l'Est. Calculer sa valeur numérique lorsque $L = 200\ m$ et $\lambda = 45°$.

3 Freinage d'un lingot métallique

Le référentiel terrestre (R_T) est supposé galiléen et on lui associe un repère d'espace $(Oxyz)$ orthonormé, de sorte que Oy soit vertical ascendant. On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base cartésienne associée à ces axes.

Un solide S se déplace sur un convoyeur à rouleaux. Nous allons nous intéresser à une phase de freinage de ce solide.



Vue dans le plan vertical (Oxy) à un instant $t > 0$. Les flèches rondes indiquent le sens de rotation des rouleaux.

S est un pavé homogène caractérisé par ses dimensions : longueur 2ℓ, hauteur $2h$ et largeur b. Sa masse est notée M et son centre d'inertie est G. Nous allons considérer la situation pour laquelle ce solide est en contact avec deux rouleaux particuliers, les rouleaux n°1 et n°2. Ces deux rouleaux sont identiques : ce sont des cylindres homogènes de rayon r, que par la suite nous noterons (C_1) et (C_2).

Chaque rouleau a un mouvement de rotation autour de son axe de symétrie, grâce à des liaisons pivot parfaites : axe O_1z pour (C_1) et axe O_2z pour (C_2). Ces deux axes sont parallèles, fixes dans (R_T), situés dans le même plan horizontal et distants de $2d$ (avec bien sûr $2\ell > 2d$).

À l'instant t, S se déplace vers la droite, son barycentre G ayant pour vecteur position :

$$\overrightarrow{OG} = x(t)\,\vec{e}_x + (r+h)\,\vec{e}_y$$

À l'instant $t = 0$, G est situé à la verticale de O et l'extrémité droite de S repose sur le point I_2. Comme le mouvement de S est une translation, tous les points de S ont la même vitesse. Nous poserons : $\dot{x}(0) = v_0$.

Enfin, on note J le moment d'inertie de chaque rouleau par rapport à son axe de rotation. Compte tenu des sens de rotation, leurs vecteurs rotation sont respectivement : $\vec{\omega}_1 = -\,\omega_1\,\vec{e}_z$ et $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\vec{e}_z$, où $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ sont les vitesses angulaires de chaque cylindre.

1. On définit la vitesse de glissement de S sur (C_1) par la relation $\vec{v}_g(1) = \vec{v}_{S/R_T} - \vec{v}_{I_1\in C_1/R_T}$. Expliciter cette vitesse en fonction de r, ω_1 et $\dot{x}$. Que peut-on en déduire pour ω_1 si ce contact est sans glissement ?

   Cette hypothèse de non glissement sur (C_1) sera supposée vérifiée dans toute la suite du problème.
2. La vitesse de glissement de S sur (C_2) est définie de façon analogue et on l'appelle $\vec{v}_g(2)$. En donner l'expression en fonction de r, ω_2 et $\dot{x}$.

   Par la suite, nous supposerons qu'un mécanisme non décrit (moteur) impose au rouleau n°2 une vitesse angulaire ω_2 constante au cours du temps et qu'il va donc freiner progressivement S. Quant au rouleau n°1, il ne tourne que sous l'action de S.

Les contacts en I_1 et I_2 ont un frottement solide, avec un même coefficient de frottement f (on confond les coefficients de frottement statique et dynamique). Notons respectivement :

$$\vec{R}_1 = N_1\,\vec{e}_y + T_1\,\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{R}_2 = N_2\,\vec{e}_y + T_2\,\vec{e}_x$$

les réactions exercées par (C_1) et (C_2) sur S.

3. Quel est le signe de T_2 ? Écrire la relation entre T_2 et N_2 en supposant $N_2 > 0$.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à S. En déduire deux relations liant N_1, N_2, T_1, T_2 et $\ddot{x}$.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique à (C_1) et en déduire une relation entre T_1 et $d\omega_1/dt$.
6. Le solide S étant en translation, il ne tourne pas. D'un point de vue physique, on peut montrer que cela implique que :
$$\sum \vec{M}_G(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$$
ce qui signifie que la somme des moments en G, des forces extérieures appliquées à S est nul. Déduire de cette relation l'égalité :
$$h\,(T_1 + T_2) + (\ell - x)\,(N_1 + N_2) - 2d\,N_1 = 0$$
7. D'après les relations obtenues aux questions précédentes, montrer que l'équation différentielle vérifiée par x s'écrit :
$$\left(M + \frac{J}{r^2} - M\frac{f h}{2d}\right)\ddot{x} + \frac{f\,Mg}{2d}\,x = f\,Mg\,\left(\frac{\ell}{2d} - 1\right)$$
Par la suite nous mettrons cette équation différentielle sous la forme :
$$\ddot{x} + \Omega^2\,x = \Omega^2\,C$$
<u>Données numériques</u> :

ℓ = 1,0 m, d = 0,80 m, h = 0,20 m, r = 0,20 m, f= 0,10
M = 3500 kg, J = 20 kg.m^2 , g = 9,81 m.s^{-2}, v_0 = 0,442 m.s^{-1}

8. Calculer les valeurs numériques de Ω et C.
9. La vitesse de S s'annule pour la première fois à l'instant $t = \tau$. Établir l'expression de $\tan(\Omega\tau)$ en fonction de v_0, Ω, ℓ et d.
10. Applications numériques : calculer la valeur numérique de τ puis la valeur x_m du déplacement du point G à cet instant. Le solide S est-il toujours en appui sur (C_1) à l'instant $t = \tau$?
11. Établir les expressions de N_1 et de N_2 en fonction de x. N_1 et N_2 étant des fonctions respectivement décroissante et croissante de x, montrer qu'il n'y a pas rupture de contact entre S et les deux cylindres entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$.