

Corrigé du DS n°4bis (Centrale - Mines)
Épreuve Mines PSI 2016
Mesures de champ magnétique
I. – Balance de Cotton

- 1 – À l'équilibre, le système formé des parties mobiles n'étant soumis qu'à son poids, qui s'applique en G et la réaction de l'axe en O , le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel du laboratoire galiléen s'écrit :

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \implies \overrightarrow{OG} // \vec{P}$$

On en déduit que $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{u}_z$, donc G est sur la verticale passant par O , pas nécessairement en O .

- 2 – La force de Laplace qui s'exerce sur un élément $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$ est $d\vec{F}_l = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est dirigée selon $\vec{u}_r$, son moment par rapport à O est nul.

3 –

$$d\vec{\mathcal{M}}_l = \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = \int_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2} x \vec{u}_x \wedge (i dx \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z B)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = -\vec{u}_z i B \left[\frac{x^2}{2} \right]_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_l = -\vec{u}_z \frac{iB}{2} (2d_1)(-\ell),$$

finalement :

$$\vec{\mathcal{M}}_l = i B d_1 \ell \vec{u}_z$$

À l'équilibre la somme des moments est nulle, on en déduit : $i B d_1 \ell = m g d_2$, soit

$$B = \frac{m g}{i \ell} \frac{d_2}{d_1}$$

- 4 – L'incertitude sur B est reliée à celle sur m par la relation :

$$\delta B = \delta m \frac{g d_2}{i \ell d_1}$$

Numériquement, on établit $\delta B = 1.10^{-3} \text{T}$, cette valeur est en ordre de grandeur 10 fois plus grande que le champ magnétique terrestre, mais 1000 fois plus faible que le champ créé par un aimant permanent en fer, néodyme et cobalt.

II. – Utilisation d'une boussole

II.A. – Étude générale

- 5 – Appliquons le théorème du moment cinétique à l'aiguille aimantée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

soit en projection sur $\vec{u}_z$,

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\mathcal{M} B \sin \alpha$$

À l'équilibre, $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$, donc $\sin \alpha = 0$, soit $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

La position stable est $\alpha = 0$, lorsque $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires et de même sens. Pour α petit, $\sin \alpha \simeq \alpha$, l'équation différentielle vérifiée par α est donc :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{\mathcal{M} B}{J} \alpha = 0$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K B \alpha = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales, la solution de cette équation est :

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\sqrt{K B} t)$$

- 6 – Le champ magnétique uniforme créé dans le volume intérieur d'un solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, où n est le nombre de spires par unité de longueur. L'unité de n est donc m^{-1} , ainsi la seule expression de B_0 , parmi les expressions proposées, qui a la même dimension est :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

- 7 – Le champ magnétique en un point repéré par $x = XR$ est la somme des champs magnétiques créés par chacune des deux bobines, d'après l'expression fournie, on obtient :

$$\vec{B}(X) = N \vec{B}_0 \left[\frac{8}{5\sqrt{5}} \right] \left[2 - 2 \frac{144}{125} X^4 \right] + o(X^4)$$

soit :

$$\vec{B}(X) = \vec{B}(0) \left[1 - \frac{144}{125} X^4 \right]$$

Soit X_{max} la valeur de X telle que $\frac{B(X_{max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{2}{100}$

Comme $\frac{B(X_{max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{144}{125} X_{max}^4$, on calcule $X_{max} = \pm 0,4$, et on en conclut que la plage des valeurs de x telle que le champ magnétique ne varie pas de plus de 2% de sa valeur maximale en $x = 0$ est :

$$-0,4R < x < 0,4R$$

La valeur du champ magnétique en O est :

$$B(0) = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

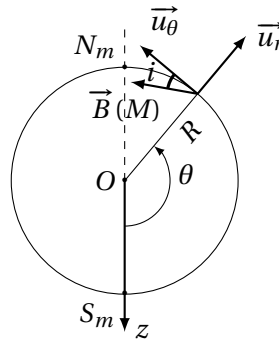
- 8 – Comme $\omega = \sqrt{KB}$, $K = \frac{\omega^2}{B}$, soit :

$$K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{1}{B}$$

Numériquement : $K = 3,710^5 \text{ s}^{-2} \cdot \text{T}^{-1}$.

II.B. – Applications au champ magnétique terrestre

- 9 – La situation est représentée sur la figure ci-dessous :



D'après le schéma, on peut relier $\tan i$ à B_r et B_θ en faisant attention au fait que $\theta > \pi/2$ dans l'hémisphère nord, ce qui implique $B_r < 0$ car $\cos \theta < 0$. Nous obtenons donc :

$$\tan i = \left| \frac{B_r}{B_\theta} \right|$$

soit $\tan i = 2 \left| \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right|$ et donc :

$$|\tan \theta| = \frac{2}{\tan i} \iff \tan \theta = -\frac{2}{\tan i}$$

Numériquement : $\theta = 135,7^\circ = 135^\circ 43'$.

En retranchant 90° , nous obtenons la *latitude magnétique* λ_m de Paris, c'est à dire : $\lambda_m = 45^\circ 43'$. Celle-ci est différente de la latitude géographique donnée dans l'énoncé ($\lambda = 48^\circ 52'$) car le nord géographique ne coïncide pas avec le nord magnétique.

- 10 – Lorsque l'axe de rotation est vertical, la boussole oscille avec une pulsation reliée à la composante horizontale B_θ du champ magnétique soit $\omega = \sqrt{KB_\theta}$. De plus $B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi R_T^3}$, soit :

$$\mathcal{M} = \frac{\omega^2 4\pi R_T^3}{K \mu_0 \sin \theta}$$

et

$$\|\vec{B}\| = B_\theta \sqrt{1 + \tan^2 i}$$

Numériquement : $\mathcal{M} = 8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ce qui est conforme à l'estimation habituelle du moment magnétique terrestre et $\|\vec{B}\| = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

III. – Utilisation d'une sonde à effet Hall

- 11 – $\vec{J} = -ne\vec{v}$, soit $||\vec{v}|| = \frac{||\vec{J}||}{ne}$, et numériquement $||\vec{v}|| = 3,2 \cdot 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La force magnétique subie par l'électron est :

$$\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- 12 – en régime permanent les électrons ont une vitesse $\vec{v}$ opposée au vecteur densité de courant qui est selon $\vec{u}_x$, ainsi la force magnétique qu'ils subissent est selon $\vec{u}_z$, les électrons se déplacent vers la face (4).

La face (4) se charge négativement, la face (2) positivement.

- 13 – Appliquons le PFD à un électron dans le référentiel de la plaquette de semi-conducteur supposé galiléen, en régime permanent.

$$m_e \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -e\vec{E}_h - e\vec{v} \wedge \vec{B} - eE_x \vec{u}_x - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$$

$$\vec{0} = -e\vec{E}_h - e\vec{v} \wedge \vec{B} - eE_x \vec{u}_x - \frac{m_e}{\tau} \vec{v},$$

en régime permanent, $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}_x$, en projetant sur $\vec{u}_z$ le PFD, on obtient :

$$0 = -e\vec{E}_h \cdot \vec{u}_z - evB(\vec{u}_x \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_z$$

$$0 = -eE_h - evB$$

$$\boxed{\vec{E}_h = -vB\vec{u}_z = \frac{I_0}{neac} B\vec{u}_z}$$

Le champ $\vec{E}_h$ est un champ électrique permanent, on en déduit :

$$V_2 - V_4 = \int_2^4 \vec{E}_h \cdot \vec{u}_z dz$$

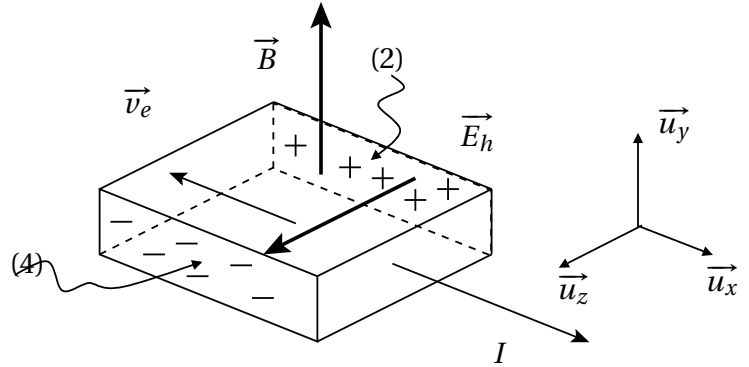
$$V_2 - V_4 = E_h a$$

$$u_h = V_4 - V_2 = -E_h a = \frac{-I_0}{nec} B.$$

Finalement :

$$\boxed{\gamma = \frac{u_h}{B} = \frac{-I_0}{nec}}$$

Numériquement : $\gamma = -95 \text{ V}\cdot\text{T}^{-1}$.



- 14** – La loi des nœuds donne $I_0 = i_R - I_c$, avec $i_R = \frac{u}{R}$, soit $R = \frac{U}{I_0 + I_c}$. Numériquement : $R = 500 \Omega$.

Le dipôle ainsi constitué est bien une source de courant idéale, car le courant I_0 ne dépend pas de la tension à ses bornes, puisque la tension $u = V_s - V_c = 5 \text{ V}$ est imposée par le composant dont on ne nous dit rien ...

- 22** – La distribution de courant source du champ magnétique $\vec{B}_0$ est une nappe de courant de densité $\vec{j} = \frac{I_0}{ac} \vec{u}_x$ entre les plans de cote $y = c/2$ et $y = -c/2$. On cherche le champ magnétique créé en un point $M(x, y, z)$ quelconque de l'espace.

Étude des symétries :

Le plan Π_1 défini par $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant. Donc $\vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{u}_z$.

Dépendance par rapport aux variables d'espace :

La distribution est invariante par translation selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$, ainsi :

$$\vec{B}(M) = B(y) \vec{u}_z.$$

Utilisons l'équation de Maxwell - Ampère dans la plaquette :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \implies \frac{\partial B}{\partial y} \vec{u}_x = \mu_0 \frac{I_0}{ac} \vec{u}_x$$

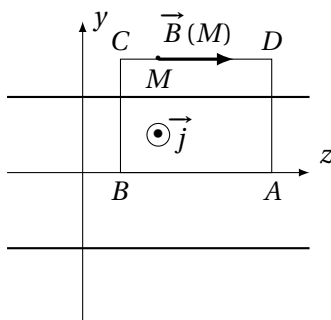
Après intégration $B(y) = \mu_0 \frac{I_0}{ac} y + K$, or $B(y=0) = 0$ car les plans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie, donc $K = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{ac} y \vec{u}_z}.$$

La valeur maximale de B_0 est obtenue pour $y = c/2$, soit $B_0 = \mu_0 \frac{I_0}{2a} = 2.10^{-6} \text{ T}$. Ce champ n'est pas totalement négligeable dans la mesure du champ magnétique terrestre qui vaut environ 5.10^{-5} T .

22bis – Prenons comme contour d'Ampère le rectangle $ABCD$ dont le côté $AB = \ell$ est situé dans le plan $y = 0$ comme cela est indiqué sur la figure ci-dessous. Nous choisissons un point M avec $y > 0$ qui est situé sur le côté CD :



La circulation de $\vec{B}$ est nulle sur les côtés AB , BC et DA . Il ne reste donc que (en tournant dans le sens $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = B(y) \ell$$

De plus :

- Si $y > c/2$, $I_{\text{enlacée}} = -j \frac{\ell c}{2}$.
- Si $0 \leq y \leq c/2$, $I_{\text{enlacée}} = -j \ell y$

et donc :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 j c}{2} & \text{si } y > c/2 \\ -\mu_0 j y & \text{si } 0 \leq y \leq c/2 \end{cases}$$

On complète ensuite l'étude pour les $y < 0$ par imparité : $B(-y) = -B(y)$. Nous obtenons donc pour $y < 0$:

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 j c}{2} & \text{si } y < -c/2 \\ -\mu_0 j y & \text{si } -c/2 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

IV. – Utilisation d'une magnétorésistance

- 23** – Le dispositif défini est invariant par translation selon $\vec{u}_z$ et rotation autour de Oz , donc le potentiel V ne dépend que de r .

Comme le conducteur est non chargée, le potentiel électrique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

Comme $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$, on déduit $r \frac{dV}{dr} = K_1$, soit $V(r) = K_1 \ln r + K_2$ à l'aide des conditions limites en $r = r_1$ et $r = r_2$, on établit :

$$V(r) = V_1 + (V_1 - V_2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_1/r_2)}$$

et le champ électrique entre les cylindres de rayon r_1 et r_2 :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \frac{V_2 - V_1}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

- 24** – Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel de la magnétorésistance qui est galiléen s'écrit, en "régime permanent" :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e\vec{E} - \lambda \vec{v} - e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Avec $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta$, le pfd projeté successivement sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ donne le système :

$$\begin{cases} -eE_r - \lambda v_r - eBv_\theta = 0 \\ -\lambda v_\theta + eBv_r = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} v_\theta = \frac{-e^2 B}{\lambda^2 + e^2 B^2} E \\ v_r = \frac{-\lambda e}{\lambda^2 + e^2 B^2} E \end{cases}$$

et $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

- 25 – Le courant I est le flux du vecteur densité de courant électrique à travers le cylindre de hauteur h et de rayon r :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h j_r r dz d\theta$$

$$I = hr2\pi \frac{\lambda e}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1) ne},$$

soit :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{(\lambda^2 + e^2 B^2) \ln(r_2/r_1)}{2\pi n h \lambda e^2}$$

Quand $B = 0$, $R = R_0 = \frac{\lambda \ln(r_2/r_1)}{2\pi n h e^2}$ et

$$\boxed{\frac{R - R_0}{R_0} = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}}$$

Numériquement : $\frac{R - R_0}{R_0} = 7,9 \cdot 10^{-11}$, et $R_0 = 112 \Omega$. Cette variation relative de résistance est vraiment très faible, et probablement très difficile à déceler.