DS n°4 (CCP-e3a) - Électromagnétisme

1 Distribution de charge

On considère, dans le vide, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé, au point M, par une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O. On pose $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

Ce champ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. La valeur algébrique $E(r)$ est définie par :

$$E(r) = k/2\varepsilon_o \qquad \text{pour} \quad r \in [\,0, R\,]\,;$$
$$E(r) = k\,R^2/2\varepsilon_o\,r^2 \qquad \text{pour} \quad r \in [\,R, +\infty\,[\,;$$

k et R sont des constantes positives.

Compte tenu des considérations de symétrie, l'opérateur scalaire $div\ \vec{E}$ s'écrit ici sous la forme simplifiée :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d\left[r^2E(r)\right]}{dr}$$

I. Potentiel électrostatique *V(r)*

On pose, par convention, $\lim V_{(r\to\infty)} = 0$.

1) Déterminer le potentiel $V(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs suivantes de r :

1.1. $r \in [\,R, +\infty\,[$;
1.2. $r \in [\,0, R]$.

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $V(r)$.

II. Charge volumique ρ*(r)*

1) Déterminer la charge volumique $\rho(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs suivantes de r :

1.1. $r \in [\,0, R]$;
1.2. $r \in [\,R, +\infty\,[$.

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\rho(r)$.

III. Charge totale q_o

1) Exprimer la charge d'une couche sphérique élémentaire, de centre O et comprise entre les sphères de rayon r et $r+dr$.

2) En déduire, en fonction de k et de R, la charge totale q_o de cette répartition de charges à symétrie sphérique.

3) Montrer que pour $r > R$, cette distribution volumique est équivalente, d'un point de vue électrostatique, à une charge électrique ponctuelle q_o placée au point O.

2 La foudre

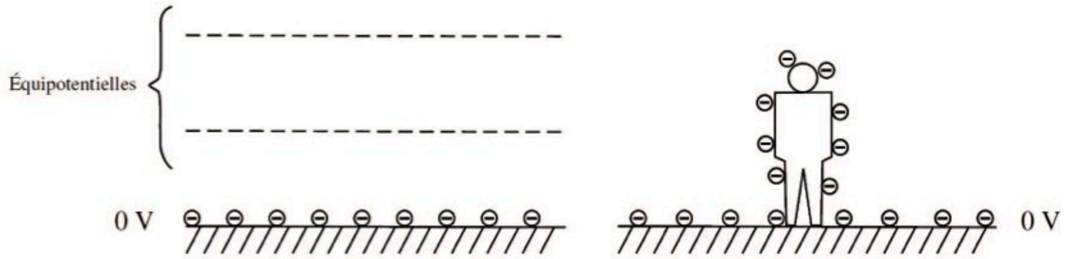
Données numériques

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}
Intensité du champ de pesanteur terrestre	$g = 9{,}8$ m · s^{-2}
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}3$ J · K^{-1} · mol^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

I Le système Terre-atmosphère

On considère que la Terre et son atmosphère constituent les deux armatures d'un condensateur sphérique. L'armature terrestre est chargée négativement, l'atmosphère positivement. Au voisinage du sol, le champ électrique créé est de l'ordre de 10^2 V · m^{-1}.

I.1 On suppose conventionnellement que le sol est de potentiel nul. Reproduire la figure 9a sur votre copie et attribuer à chacune des équipotentielles sa valeur en volts, sachant qu'elles sont séparées d'un mètre. Représenter quelques lignes de champ électrique.



(a) En l'absence d'obstacle (b) En présence humaine

Figure 9 – Déformation des surfaces équipotentielles

I.2 Reproduire la figure 9b sur votre copie et représenter les mêmes équipotentielles que celles de la figure 9a, en tenant compte de la présence d'un homme. Représenter quelques lignes de champ électrique au voisinage de l'homme. L'observation de ces lignes de champ permet-elle de déterminer les zones de faible ou de fort champ électrique ? On justifiera le plus précisément possible à l'aide d'une équation de Maxwell. Commenter dans le cas d'un temps orageux.

I.3 Le système Terre-atmosphère est localement modélisable par un condensateur plan dont une armature porte la densité surfacique de charge σ supposée positive. On rappelle qu'un plan infini portant la densité surfacique de charge σ crée un champ électrique de norme $E_{\text{plan}} = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

I.3.a Rappeler l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle q située en un point de l'espace et vérifier ainsi l'homogénéité de l'expression précédente du champ électrique E_{plan}.

I.3.b Représenter le vecteur champ électrique de part et d'autre du plan infini portant la densité surfacique de charge σ. Établir, en utilisant l'expression de E_{plan} et à l'aide d'un théorème que l'on nommera, l'expression de la norme du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur d'un condensateur plan.

I.3.c Sachant que $\sigma = 1{,}1 \times 10^{-9}$ C · m^{-2}, quelle valeur numérique du champ électrique à l'intérieur du condensateur plan peut-on en déduire ?

Il s'agit là, en réalité, d'une valeur moyenne, la norme du champ électrique évoluant régulièrement avec l'altitude.

II Le champ électrique dans la basse atmosphère

Dans la basse atmosphère, où se développent les orages, le champ de pesanteur peut être supposé uniforme et noté $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$. L'air est assimilé à un gaz parfait pour lequel on note $\gamma = c_p/c_v$ le rapport supposé constant entre les capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant. L'atmosphère est en équilibre adiabatique et l'on note $\rho(z)$ et $P(z)$ les masse volumique et pression mesurées à l'altitude z, l'axe des z étant orienté selon la verticale ascendante.

II.1 L'étude se fait dans un référentiel galiléen. Qu'est-ce qu'un référentiel ? Un référentiel en translation rectiligne par rapport à un référentiel galiléen est-il lui-même galiléen ? Justifier.

II.2 On isole par la pensée un parallélépipède élémentaire d'air, de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$, d'altitude comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, que l'on suppose en équilibre. Représenter les forces extérieures verticales agissant sur ce volume infinitésimal. Établir la relation de la statique des fluides $\mathrm{d}P = -\rho g\,\mathrm{d}z$.

II.3 Énoncer la loi de Laplace de la thermodynamique en fonction des variables pression P et volume V. Préciser ses hypothèses d'application. Exprimer cette loi à l'aide des variables ρ et P.

II.4 On suppose que l'atmosphère est en équilibre adiabatique et que les variables P et ρ sont reliées par la relation de la question précédente. L'équilibre hydrostatique étant atteint, démontrer à l'aide de la relation de la statique des fluides et de la loi Laplace, que la masse volumique peut se mettre sous la forme

$$\left[\frac{\rho(z)}{\rho_0}\right]^{\gamma-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g\rho_0}{P_0}z \quad \text{avec} \quad P(0) = P_0 \quad \text{et} \quad \rho(0) = \rho_0.$$

II.5 On admet qu'il y a proportionnalité entre le champ électrique $E(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$. Exprimer $E(z)$ en fonction du champ à proximité du sol E_0, de g, γ, R, z, de la masse molaire moyenne de l'air M et de la température T_0 au niveau du sol.

Ce champ électrique présent dans la basse atmosphère induit alors une circulation des ions qu'elle contient.

III Le mouvement des ions

Bien qu'électriquement neutre, l'atmosphère est constituée de nombreux ions, qui vont se déplacer dans le champ électrique. On étudie dans cette question le mouvement d'un cation, de charge e et de masse m, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ électrique terrestre $\vec{E}$, supposé constant et uniforme. Le champ magnétique terrestre et la pesanteur sont négligés. Lors de son déplacement, l'ion subit une force de frottement fluide $\vec{F_f} = -\lambda\vec{v}$, avec $\lambda = 5{,}0 \times 10^{-16}$ SI.

III.1 Citer un mécanisme à l'origine de la création des ions de l'atmosphère.

III.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$.

III.3 En supposant nulle la vitesse initiale du cation, établir l'expression de $\vec{v}(t)$.

III.4 En déduire les expressions de la vitesse limite du cation, $\vec{v_\ell}$, et de son temps caractéristique d'établissement τ. Déterminer les unités de λ.

III.5 On considère un champ électrique de norme égale à $E = 100\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

III.5.a On prend pour la masse du cation $m = 4{,}8 \times 10^{-26}$ kg. Déterminer les valeurs numériques de v_ℓ et τ.

III.5.b Est-il légitime de négliger l'action du champ de pesanteur ? Justifier numériquement.

III.5.c Donner un ordre de grandeur de la valeur du champ magnétique terrestre. Est-il légitime de négliger l'action du champ magnétique terrestre ? Justifier numériquement.

Ce déplacement d'ions va tendre à annuler la différence de potentiel entre la Terre et l'atmosphère. Pour maintenir le déséquilibre entre la charge terrestre et celle de l'atmosphère, il faut donc constamment recharger la Terre négativement. C'est ce que font les orages par le biais de la foudre.

IV La foudre

Lors d'un coup de foudre, l'air est ionisé dans un canal conduisant du sol au nuage orageux. On assimile l'éclair à un fil rectiligne infini, d'axe Oz et de rayon a, parcouru par un courant $I(t)$ uniformément réparti dans une section droite et l'on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Un point M au voisinage de l'éclair sera repéré en représentation cylindrique, par ses coordonnées (r,θ,z).

IV.1 Placer sur un schéma, l'éclair, la base locale cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ et le point M, si l'on convient de choisir l'axe Oz ascendant.

IV.2 Sachant que l'activité électrique orageuse a pour effet de recharger la Terre négativement, déterminer le sens du courant $I(t)$ dans l'éclair.

IV.3 On s'intéresse à l'expression du champ magnétique créé par l'éclair, toujours modélisé par un fil infini de rayon a.

IV.3.a Montrer que ce champ est de la forme $\vec{B} = B(r,t)\,\vec{e_\theta}$.

IV.3.b Énoncer le théorème d'Ampère dans l'approximation des régimes stationnaires ou quasi-stationnaires. On admettra que son expression est identique au cas statique, en remplaçant I par I(t).

IV.3.c Montrer que pour $r > a$, le champ magnétique créé par l'éclair peut se mettre sous la forme $B(r,t) = K\,I(t)/r$ et déterminer l'expression littérale du coefficient K.

IV.3.d Il n'est pas rare que la foudre s'abatte simultanément sur deux pylônes métalliques voisins. Si ces deux pylônes, supposés parallèles et distants de d_0, sont parcourus par des courants strictement identiques du fait de leur foudroiement, préciser la valeur du champ magnétique produit en un point du plan défini par les deux pylônes, ce point étant situé à égale distance de ceux-ci.

Exprimer par ailleurs la force qu'exerce un pylône sur un segment de longueur L de l'autre pylône distant de d lorsque la foudre génère un courant I dans chacun des deux conducteurs. On précisera la direction et le sens de cette force.

IV.3.e Quel appareil utilise-t-on habituellement pour mesurer l'intensité d'un champ magnétique ?

IV.3.f Afin de comprendre le phénomène sonore engendré par la foudre, on modélise maintenant un éclair par un canal cylindrique d'air ionisé de rayon a, parcouru du sol vers le ciel par un courant I supposé continu de l'ordre de $100kA$, pendant une durée très brève $\tau = 10\mu s$.

La température au centre de l'éclair est d'environ $20000K$. La hauteur de l'éclair est telle que le cylindre peut être considéré comme quasi-infini. La pression extérieure est $P_0 = 1atm$.

1. On considérera dans tout l'exercice que le courant est réparti de façon uniforme dans l'éclair avec une densité volumique de courant notée $\overrightarrow{j}$. Exprimer la norme de $\overrightarrow{j}$ en fonction de I et a.
2. Par application du théorème d'Ampère et en précisant les symétries et invariances du problème, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé à l'intérieur de l'éclair par cette distribution de courant.
3. On considère que le plasma qui constitue l'éclair est à l'équilibre mécanique pendant le passage du courant. Traduire cet équilibre par un bilan de forces au niveau d'un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ faisant intervenir les forces élémentaires de pression $d\overrightarrow{f}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P\mathrm{d}\tau$, ainsi que les forces élémentaires de Laplace $\mathrm{d}\overrightarrow{f}_L = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\mathrm{d}\tau$. On commentera l'expression de ces forces et on déterminera leur expression en fonction des données du problème.

   Par intégration, en déduire l'expression de la pression $P(r)$ dans l'éclair en fonction de P_0, μ_0, I, a et r. On précisera la condition limite utilisée.
4. De la pression au centre de l'éclair, égale a 3 bars, on peut ainsi déduire numériquement le rayon de l'éclair a, qui est de l'ordre de quelques centimètres. Expliquer pourquoi un craquement sonore accompagne l'éclair.
5. Afin d'améliorer encore ce modèle, quel autre phénomène physique - négligé ici - faudrait-il également prendre en compte lors du passage de l'éclair afin d'expliquer le craquement sonore ?
6. Quel est par ailleurs l'origine de l'éclair, c'est à dire du phénomène lumineux ?

La foudre engendre donc des champs magnétiques variables qui peuvent perturber les circuits électriques domestiques, ce qui va faire l'objet de la suite de notre étude.

V Perturbation des circuits électriques

Un coup de foudre est une décharge électrique caractérisée par des courants de fortes amplitudes et de courtes durées. Lors de la décharge d'un coup de foudre, on a réalisé l'enregistrement de $I(t)$ représenté sur la figure 10. L'intensité maximale est de 30 kA.

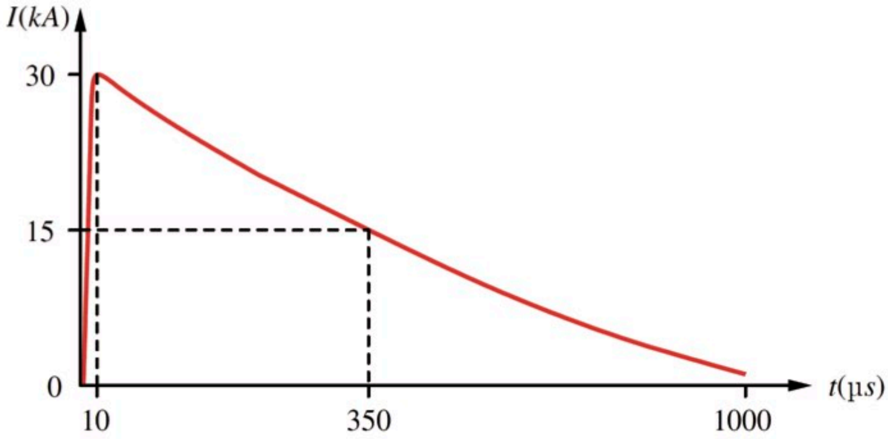


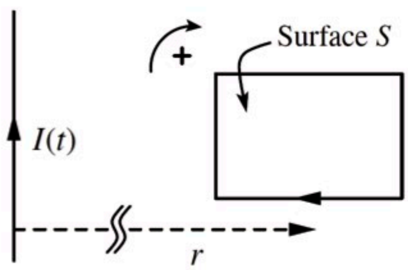
FIGURE 10 – Enregistrement de l'intensité électrique d'un coup de foudre

V.1 Rappeler la relation liant la charge à l'intensité d'un courant électrique. À l'aide de la figure 10, estimer la charge totale transportée par l'éclair. Donner l'intensité moyenne du courant transporté par l'éclair.

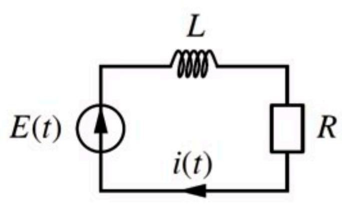
V.2 On peut modéliser cette courbe par une équation du type $I(t) = I_0[\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)]$. Déterminer, en fonction de α et β, l'expression du *temps de montée* t_m de ce signal électrique, c'est-à-dire la durée nécessaire pour qu'il atteigne son maximum.

V.3 Ce signal est une onde de courant normalisée, de type 10/350. Cela signifie que l'intensité électrique est maximale à la date $t_1 = 10$ µs et qu'à la date $t_2 = 350$ µs, elle a atteint la moitié de sa valeur maximale. À l'aide de ces informations, poser un système de deux équations indépendantes de I_0 permettant d'obtenir les constantes α et β, que l'on ne calculera pas.

V.4 On considère le circuit électrique domestique d'alimentation d'une lampe. On l'assimile, pour simplifier, à un cadre rectangulaire de surface S, situé à la distance r d'un éclair (voir figure 11a).
On modélise l'éclair par un fil rectiligne vertical infini parcouru par un courant électrique d'intensité $I(t)$. Il produit un champ magnétique d'expression $B(r,t) = K\, I(t)/r$.



(a) Présentation géométrique



(b) Modélisation électrique en l'absence d'éclair

FIGURE 11 – Perturbation des circuits électriques

Le circuit électrique et l'éclair sont coplanaires et suffisamment éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse supposer homogène le champ magnétique au niveau du circuit.

V.4.a Ce circuit est le siège d'un phénomène d'induction. Quel célèbre expérimentateur l'a découvert ? Dans quelle moitié de quel siècle ?

V.4.b En respectant la convention d'orientation proposée sur la figure 11a, établir l'expression de la force électromotrice e induite dans le cadre par l'éclair en fonction de S, K, $I(t)$ et r. Donner les unités de e.

V.4.c Le circuit électrique domestique contient une alimentation alternative de force électromotrice $E(t)$, une bobine d'inductance L et la résistance R associée aux fils et à la lampe (voir figure 11b). Établir l'équation différentielle électrique complète de ce circuit en tenant compte de la perturbation due à l'orage.

V.4.d À quel moment du coup de foudre, enregistré sur la figure 10, la force électromotrice induite est-elle maximale ? Justifier.

Les perturbations électriques provoquées par la foudre ne sont pas seulement aériennes, elles se poursuivent dans le sol et peuvent être cause d'électrocutions.

VI Tension de pas

Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter sous un arbre. Nous allons tenter d'en comprendre la raison.

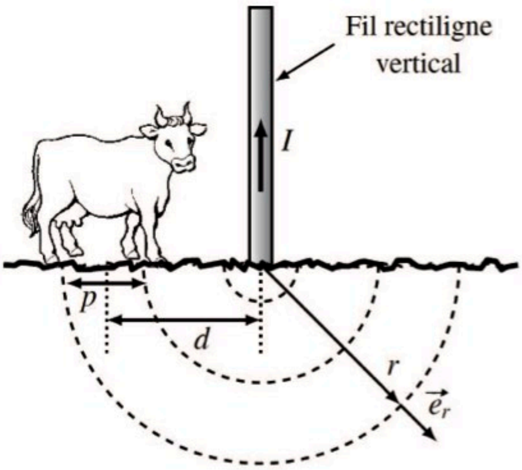


FIGURE 12 – L'électrocution par le sol

Modélisons l'éclair traversant l'arbre par un fil rectiligne vertical semi-infini, parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité $I = 15$ kA (voir figure 12). Cette demi-droite prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité volumique de courant est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$, expression dans laquelle $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques. L'étude sera menée en régime stationnaire. On donne l'expression de la loi d'Ohm locale, qui permet de relier la densité volumique de courant et le champ électrique dans un conducteur par l'intermédiaire de la conductivité électrique γ : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On notera $\gamma = 1\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$ la conductivité électrique du sol.

VI.1 Montrer que $j(r) = -\dfrac{I}{2\pi r^2}$.

VI.2 Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale. Exprimer le champ électrique $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ dans le sol et en déduire que son potentiel vaut $V(r) = -\dfrac{I}{2\pi\gamma r}$, en le supposant nul à l'infini.

VI.3 Une vache se trouve à la distance moyenne d de l'arbre et la distance entre ses deux pattes avant et arrière est p (voir figure 12). Exprimer, en fonction de p et d, les potentiels au niveau des pattes avant et arrière de la vache. En supposant que $d^2 \gg (p/2)^2$, montrer que la différence de potentiel entre les pattes U_p, ou *tension de pas*, est de l'ordre de $U_p \simeq \dfrac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$.

VI.4 Soit $R \simeq 2{,}5\ \mathrm{k\Omega}$ la résistance entre les pattes avant et arrière de la vache, distantes de $p \simeq 1{,}5$ m. À quelle distance minimale d_m du point d'impact doit-elle se trouver pour que son corps soit traversé par un courant électrique d'intensité inférieure à $I_{max} = 25$ mA ? On donnera l'expression de d_m en fonction de I, I_{max}, p, R et γ. Évaluer numériquement d_m.

VI.5 Expliquer pourquoi cette *tension de pas* est plus dangereuse pour une vache que pour l'homme.