TD : ÉQUATIONS DE MAXWELL

1 Décharge dans un gaz

Donnée : pour un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\vec{u}_r$ dans le système des coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a(r,t)\right)$$

Deux sphères métalliques minces (S_1) et (S_2), de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ sont séparées par un gaz initialement isolant et dont les constantes électromagnétiques peuvent être confondues avec celles du vide, c'est à dire ϵ_0 et μ_0.

Initialement, (S_2) n'est pas chargée et (S_1) porte la charge électrique Q. La sphère métallique (S_1) est creuse, c'est à dire vide de toute matière et, de la même façon, le milieu extérieur à (S_2), caractérisé par $r > R_2$, est vide lui aussi. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le gaz devient brusquement conducteur et qu'il obéit à la loi d'Ohm locale, ce qui signifie que $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$ en tout point du gaz, γ étant la conductivité électrique (grandeur supposée constante).

1) En analysant les symétries du problème, montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ne peut être que nul en tout point de l'espace. Montrer de même que, $\vec{u}_r$ désignant le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques, le champ électrique est nécessairement de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r,t)\,\vec{u}_r \text{ pour toute valeur de } r = OM$$

2) a) Déterminer à l'aide des équations de Maxwell une équation différentielle par rapport au temps, vérifiée par $E(r,t)$ pour $R_1 < r < R_2$. En déduire l'expression de $E(r,t)$ en fonction de t, r et Q. On introduira un temps caractéristique τ pour exprimer ce champ.

b) Déterminer $E(r,t)$ pour $r < R_1$ puis $r > R_2$.

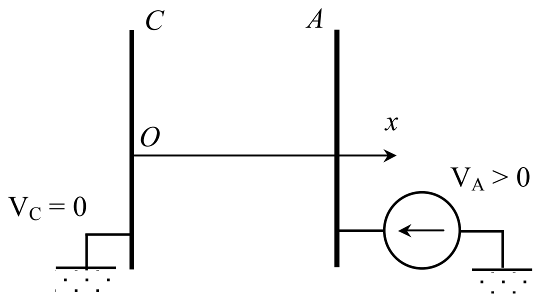
3) Que vaut la densité volumique de charges ρ dans l'espace entre les deux sphères ? Quelle est l'expression de $\vec{j}$? Est-ce compatible avec l'équation de conservation de la charge électrique ?

2 Tube à vide

Un tube à vide est constitué de deux armatures métalliques planes A et C enfermées dans une ampoule où règne le vide. La cathode C, de potentiel nul, émet par effet thermoélectrique des électrons sans vitesse initiale qui sont attirés par l'anode A maintenue au potentiel $V_A > 0$.

On étudie le régime stationnaire d'écoulement des électrons, de charge $-e$ et de masse m, de C vers A ce qui correspond à un courant d'intensité constante I.

La cathode C qui occupe le plan $x = 0$ et l'anode A, qui occupe le plan $x = L$, sont planes, parallèles et ont même surface en regard S.



1) On suppose que les grandeurs de ce problème ne dépendent que de la distance x à la cathode ($0 < x < L$).

a) Écrire l'équation locale satisfaite par le potentiel électrique $V(x)$, en introduisant le nombre $n(x)$ d'électrons par unité de volume à l'abscisse x.

b) Quelle est la relation entre la densité volumique de courant $j(x)$, $n(x)$ et la vitesse $u(x)$ des électrons à l'abscisse x ? Relier $j(x)$ à l'intensité $I(x)$ qui traverse la surface plane d'aire S, perpendiculaire à Ox et située à l'abscisse x. Montrer que cette intensité ne dépend pas de x.

c) En utilisant l'énergie mécanique d'un électron, relier $u(x)$ à $V(x)$.

2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{K}{\sqrt{V(x)}}$$

où K est une constante à exprimer en fonction de e, m, S, ε_0 et l'intensité I.

3) a) En multipliant l'équation précédente par $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ et en intégrant, montrer que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = 2\sqrt{K}\,[V(x)]^{1/4}$$

On admettra que le champ électrique est nul au niveau de la cathode.

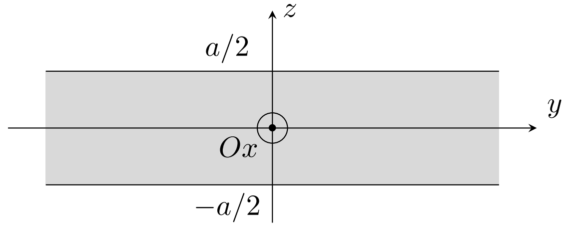
b) Déduire de l'équation précédente que l'intensité I du courant est liée au potentiel V_A de l'anode par la relation : $I = a\,V_A^{3/2}$ et déterminer la constante a.

Application numérique : $S = 1{,}0$ cm^2 ; $L = 2$ cm ; calculer I si $V_A = 80$ V. On donne : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m.

3 Plaque conductrice dans un champ magnétique oscillant

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$.

Une plaque de cuivre homogène d'épaisseur a est délimitée par deux plans de cotes respectives $z = -a/2$ et $z = +a/2$. On la suppose infinie selon les directions Ox et Oy. Du point de vue de ses propriétés électromagnétiques, elle est caractérisée par une perméabilité μ_0, une permittivité ε_0 et une conductivité électrique γ.



La plaque est plongée dans un champ magnétique uniforme et à variation temporelle sinusoïdale de pulsation ω, de la forme :

$$\overrightarrow{B_0}(t) = B_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$$

Ce champ magnétique variable induit (par induction électromagnétique) dans la plaque des courants $\overrightarrow{j}(z,t)$ qui ne dépendent que de la coordonnée z et on admettra que la densité volumique de charges ρ est nulle en tout point du conducteur. Il existe alors en tout point de la plaque un champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$.

1) De quelle(s) coordonnée(s) dépend $\overrightarrow{E}$?

2) On suppose que le champ magnétique créé par les courants de la plaque est négligeable devant $\overrightarrow{B_0}(t)$ et on admettra que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ dans le plan $z = 0$. Montrer à partir des équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday que :

$$\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = E(z,t)\,\overrightarrow{u_y}$$

et déterminer $E(z,t)$ en fonction de B_0, ω, z et t.

3) On reprend le problème à zéro en supposant seulement que $\overrightarrow{E} = E(z,t)\,\overrightarrow{u_y}$, avec $E(z=0,t)=0$.

En calculant la circulation de $\overrightarrow{E}$ sur une courbe fermée convenablement choisie, retrouver l'expression de $E(z,t)$ de la question 2) grâce à la loi de Faraday.

4 Boule radioactive *

L'expression de la divergence en coordonnées sphériques d'un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\vec{u}_r$ sera prise dans le formulaire ou au début de l'exercice 1.

Une boule de matière radioactive, de centre O et de rayon R, est électriquement neutre à l'instant $t=0$. À partir de cet instant initial, elle émet depuis sa surface n positons β^+ par unité de temps, chaque positon ayant une charge élémentaire e. On suppose que l'émission est isotrope, les charges émises ayant une même vitesse radiale $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$ de norme v constante.

1) a) En étudiant la charge électrique contenue à l'instant $t>0$ dans une coquille sphérique limitée par les rayons r et $r+\mathrm{d}r$, déterminer la densité volumique de charges $\rho(r,t)$ en tout point de l'espace situé à une distance $r>R$ du centre de la boule radioactive. Que se passe-t-il si $r > R+vt$?

b) Expliciter de même le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point situé à une distance $r>R$.

2) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en tout point M tel que $r = OM > R$. Que peut-on dire du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$?

3) Quelle est la charge électrique $Q(t)$ de la boule radioactive à l'instant t ? Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss.

5 Condensateur alimenté en haute fréquence. Limites de l'ARQS *

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon a, d'axe Oz situés dans les plans $z=+h$ et $z=-h$. On admet que $\overrightarrow{E}(M,t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$ entre les armatures du condensateur. Pour $h \ll a$, ce modèle est justifié sauf au voisinage immédiat des bords, c'est-à-dire en $r=a$. Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $f = \omega/2\pi$ et on souhaite déterminer la structure du champ électromagnétique créé à l'intérieur de celui-ci.

Formules d'analyse vectorielle :

- Laplacien d'une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindriques :

$$\triangle f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{a}) - \Delta\overrightarrow{a}$
- Pour $\overrightarrow{a} = f\,\overrightarrow{e_z}$ on a $\Delta\,\overrightarrow{a} = (\Delta\,f)\,\overrightarrow{e_z}$.

On cherche un champ électrique entre les deux armatures du condensateur, de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E(r,z)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

1) En utilisant une des équations de Maxwell, montrer que $E(r,z)$ ne dépend pas de z. Dans la suite on le notera $E(r)$

2) Toujours à partir des équations de Maxwell, montrer que le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ dans l'espace entre les deux armatures vérifie :

$$\triangle\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

3) En déduire que $E(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} + \frac{\omega^2}{c^2}E(r) = 0$$

4) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière en posant :

$$E(r) = E(0)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n$$

Établir une récurrence sur les coefficients a_n et en déduire les trois premiers termes non nuls de la série en partant de $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, hypothèses qu'on justifiera.

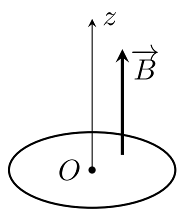
5) On pose $x = \frac{\omega r}{c}$. Montrer que si $x \ll 1$ on peut se contenter des deux premiers termes de la série entière donnant $E(r)$. Cette approximation est-elle vérifiée avec $a = 10$ cm et $f = 10$ MHz (limite supérieur d'un générateur de laboratoire usuel). À quel concept renvoit la relation $x \ll 1$?

****

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

6 Charge électrique induite dans une spire

Une spire plate, circulaire de rayon $a = 10$ cm, de centre O et d'axe Oz est constituée d'un enroulement de $N = 10$ tours de fil. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$.



Le fil dont est fait la spire a une section d'aire $s = 0{,}78$ mm^2 et il est réalisé en cuivre dont la résistivité électrique (inverse de la conductivité électrique) vaut $\rho = 1{,}7.10^{-8}$ Ω.m.

1) Calculer la résistance électrique R des N tours de fil.

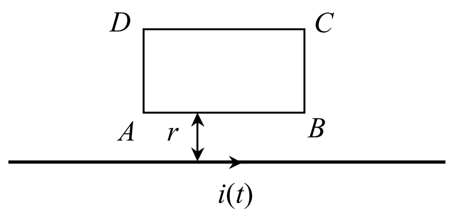
2) La composante B du champ magnétique vaut B_1 pour $t \leqslant t_1$, puis augmente et finit par se stabiliser à un instant $t_2 > t_1$ à une valeur $B_2 > B_1$. Déterminer en fonction de $\Delta B = B_2 - B_1$, R, a et N la charge électrique Q qui a traversé une section du fil entre les instants 0 et t_1.

3) À partir de la situation où $B = B_2$, on retourne la spire, c'est à dire qu'on lui fait subir une rotation de 180° autour d'un axe perpendiculaire à Oz. Déterminer la nouvelle charge électrique Q' qui a traversé une section du fil au cours de ce retournement.

Note : dans tout cet exercice, on néglige l'inductance propre de la spire.

7 force électromotrice induite dans un cadre

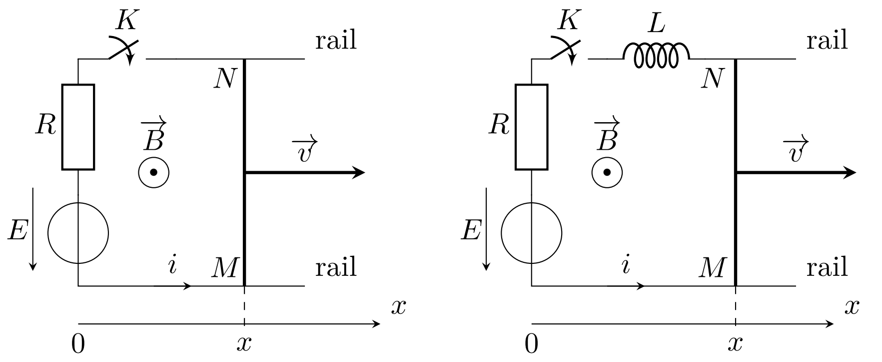
1) Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant électrique d'intensité $i(t)$. Calculer la f.é.m. $e(t)$ induite dans un cadre rectangulaire conducteur $ABCD$ de côtés $AB = a$, $BC = b$, immobile et situé à la distance r du fil.



2) Le fil est maintenant parcouru par un courant permanent I tandis que le cadre s'éloigne de celui-ci avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ constante, perpendiculaire au fil. À l'instant $t = 0$ le côté AB est à la distance r_0 du fil. Calculer la f.é.m. induite $e(t)$ dans le cadre.

8 Tige sur des rails de Laplace

Une tige MN de résistance négligeable, de longueur h et de masse m, se déplace sans frottements sur deux rails horizontaux parallèles de résistances négligeables, en restant perpendiculaire aux rails. Le circuit fermé par la tige MN comprend, disposés en série, une résistance R, un générateur de tension idéal de f.é.m. E constante et un interrupteur K. Ce circuit est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme et perpendiculaire au plan des rails (Figure à gauche)



1) Analyser qualitativement se qui va se produire après la fermeture de l'interrupteur.

2) La tige étant initialement immobile, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Déterminer une équation mécanique (EM) puis une équation électrique (EE), qui relient l'intensité du courant $i(t)$ et la vitesse $\overrightarrow{v}(t) = v(t)\,\overrightarrow{u_x}$ de la tige.

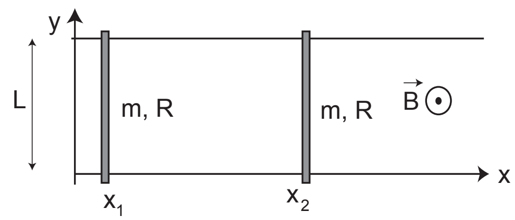
3) Exprimer l'intensité du courant $i(t)$ en faisant apparaître une constante de temps τ. Tracer l'allure du graphe donnant $i(t)$ en fonction du temps, puis celle du graphe donnant $v(t)$ en fonction de t.

4) Montrer que l'énergie fournie par le générateur s'est transformée d'une part en énergie mécanique de la tige et, d'autre part, a été dissipée par effet Joule dans la résistance.

5) On s'intéresse maintenant au circuit de droite. Un bobine idéale d'inductance propre L y a été insérée. Quelle est la nouvelle équation électrique (EE) ? Montrer que l'énergie fournie par le générateur est égale à la somme de l'énergie mécanique de la tige + l'énergie stockée dans la bobine + l'énergie dissipée par effet Joule.

9 Deux tiges sur des rails de Laplace

On considère deux rails parallèles fixes selon Ox, de résistance négligeable, distants de $L = 15$ cm. Deux rails mobiles de résistance $R = 50$ mΩ, de masse $m = 5$ g sont posés sur les premiers parallèlement à Oy. Il n'y a pas de frottement. Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\,\overrightarrow{u_z}$.



Initialement $\dot{x}_1(t = 0) = v_0$ et $\dot{x}_2(t = 0) = 0$.

1) Déterminer les équations vérifiées par les vitesses v_1 et v_2. Les résoudre en posant $V = v_1 + v_2$ et $U = v_1 - v_2$.

2) On donne sur la figure 1 page suivante l'intensité dans le circuit en fonction du temps. Déterminer par lecture graphique v_0 et B_0.

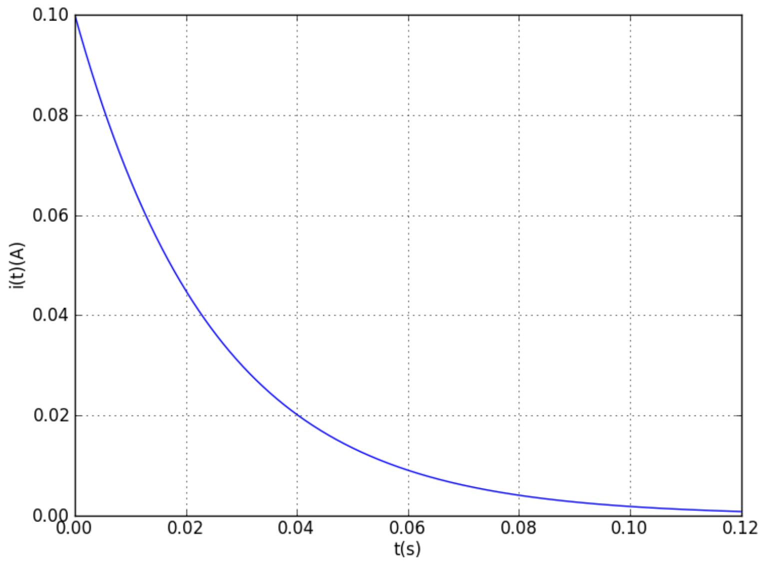


FIGURE 1 –

3) Montrer que l'énergie mécanique des deux tiges se transforme en chaleur par effet Joule.

Inductances de circuits filiformes

10 Couplage entre deux bobines

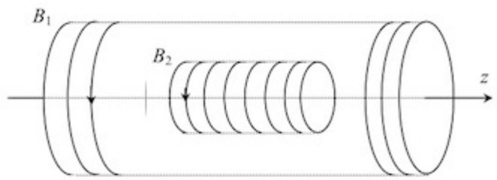
Deux bobine B_1 et B_2, de sections circulaires S_1 et S_2, ont pour caractéristiques :

— n_1 et n_2 spires par unité de longueur,

— longueurs ℓ_1 et ℓ_2 ($\ell_2 < \ell_1$) suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets de bord,

— résistances R_1 et R_2.

B_2 est placée entièrement à l'intérieur de B_1 et leurs axes de symétrie sont confondus.



1) Déterminer les inductances L_1 et L_2 ainsi que la mutuelle inductance M.

2) B_2 est fermée sur elle-même par un court circuit et B_1 est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω : $i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega t)$. Soit $i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega t + \varphi)$ le courant qui traverse B_2 en régime sinusoïdal permanent.

Déterminer le rapport $\dfrac{I_{m2}}{I_{m1}}$ des amplitudes des deux intensités.

11 Circuits couplés par une inductance mutuelle

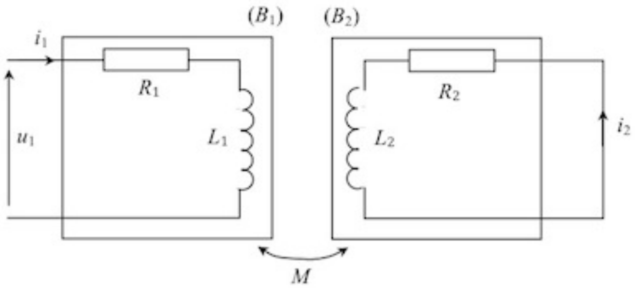
Deux circuits ont la même inductance propre L et une inductance mutuelle M. Ils contiennent en outre deux condensateurs de même capacité C. On néglige les résistances totales des deux circuits.

1) Écrire le système d'équations différentielles auxquelles satisfont les charges q_1 et q_2 des armatures supérieures des deux condensateurs, lorsque les interrupteurs K_1 et K_2 sont fermés.

2) Résoudre ce système et donner pour $t > 0$ l'expression de $q_1(t)$ et de $q_2(t)$ avec les conditions initiales suivante : $q_1(0) = Q_0$; $q_2(0) = 0$; $i_1(0) = i_2(0) = 0$.

12 Impédance d'un circuit couplé par inductance mutuelle

Une bobine (B_1) d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 est couplée, avec un coefficient de mutuelle inductance M, à une bobine (B_2) d'inductance L_2 et de résistance R_2 fermée sur elle-même par un court circuit.



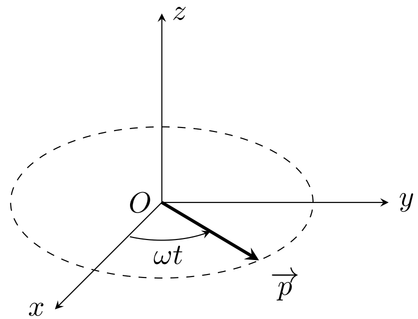
Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u_1}}{\underline{i_1}}$ entre les bornes de (B_1), en régime sinusoïdal de pulsation ω.

****

RAYONNEMENT DIPOLAIRE

13 Dipôle tournant

Un dipôle électrique tourne dans le plan Oxy à la vitesse angulaire ω. En notant p la norme (constante) du moment dipolaire électrique, calculer la puissance P_{ray} rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r, en fonction de μ_0, c, p et ω.



14 Durée de vie d'un atome

Dans le modèle planétaire classique de l'atome, les électrons décrivent des orbites circulaires autour du noyau. Considérons un atome d'hydrogène dont le noyau est immobile en O et où l'électron, de masse m et de charge électrique $-e$, est en orbite à la distance constante r_e du noyau.

1. a) En supposant que la seule force exercée sur l'électron est la force électrique due au noyau, calculer l'accélération $\overrightarrow{a}(t)$ de l'électron en fonction de m, e, ε_0 et r_e.
   b) Expliciter l'énergie mécanique E de l'électron en fonction de e, ε_0 et r_e.

La puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est donnée par la formule de Larmor :

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2\,\|\overrightarrow{a}_{\text{ret}}\|^2}{c^3}$$

2. a) Déterminer P_{ray} en fonction de e, m, ε_0, c et r_e.

   b) Cette puissance rayonnée est prélevée sur l'énergie mécanique de l'électron. Si on suppose que l'énergie rayonnée durant une révolution de l'électron autour du noyau est très petite devant l'énergie mécanique E, on peut considérer que l'orbite électronique est quasiment circulaire avec un rayon $r_e(t)$ qui varie lentement.

   Établir à partir de considérations énergétiques l'équation différentielle vérifiée par $r_e(t)$ et en déduire l'évolution du rayon de l'orbite en fonction du temps. On notera r_0 la valeur de r_e à $t = 0$.

   c) Application numérique. À $t = 0$, $r_0 = 53$ pm (rayon de Bohr). Calculer la durée τ au bout de laquelle $r_e = 0$ et la comparer à la période T de révolution de l'électron. Conclure.

****

ÉNERGIE ELECTROMAGNÉTIQUE

15 Calcul d'une capacité à l'aide de l'énergie

Un condensateur sphérique possède une armature interne de rayon R_1 et une armature externe de rayon $R_2 > R_1$. L'armature interne porte la charge électrique Q tandis que 'armature externe porte la charge opposée $-Q$. Le régime est stationnaire.

1. Calculer le champ électrique $\overrightarrow{E} = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$ en tout point de l'espace entre les deux armatures.
2. En déduire la différence de potentiel $U = V(R_1) - V(R_2)$ en fonction de Q, R_1 et R_2. Quelle est alors la capacité C de ce condensateur ?
3. Calculer l'énergie électrique U_E dans l'espace entre les deux armatures. Retrouver alors l'expression de C.

16 Rayon classique de l'électron

Un électron, de charge électrique totale $-e$, est modélisé par une boule de centre O et de rayon a, uniformément chargée en volume (de densité volumique de charge ρ). On suppose l'électron immobile.

1. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace par cette distribution de charges.
2. Calculer l'énergie électrique U_E totale contenue dans tout l'espace. En supposant que cette énergie est égale à l'énergie de masse $E = m\,c^2$ de l'électron, en déduire la valeur du rayon a (rayon classique de l'électron).
3. Application numérique : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ u.S.I. ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C. Calculer a

17 Inductance d'un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué d'un cylindre conducteur d'axe Oz et de rayon R_1 parcouru par un courant électrique d'intensité I (âme) entouré d'une enveloppe cylindrique de même axe Oz et de rayon $R_2 > R_1$ (on néglige l'épaisseur de cette enveloppe) parcourue par le même courant électrique I mais en sens inverse (gaine).

Les deux courants sont purement surfaciques et on leur associe une densité surfacique de courant $\vec{j}_{1S} = j_{1S}\,\vec{u_z}$ pour l'âme (c'est à dire en tout point de la surface $r = R_1$) et $\vec{j}_{2S} = -\,j_{2S}\,\vec{u_z}$ ($j_{2S} > 0$) pour la gaine (c'est à dire en tout point de la surface $r = R_2$).

Le régime est stationnaire et les deux cylindres sont supposés de longueur infinie.

1. À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z). On exprimera le résultat en fonction de I.
2. Calculer l'énergie magnétique U_B répartie dans le volume situé entre les deux plans d'abscisses $z = z_0$ et $z = z_0 + \ell$.
3. On définit l'inductance linéique λ du câble coaxial en posant :

$$U_B = \frac{1}{2}\,\lambda\ell\,I^2$$

Calculer λ en fonction de μ_0, R_1 et R_2.

18 Bilan énergétique d'un fil conducteur

Un fil cylindrique infini, d'axe Oz et de rayon a est réalisé dans un matériau conducteur de type ohmique, possédant une conductivité électrique γ. Ce fil est parcouru par un courant électrique I stationnaire, avec une densité volumique de courant $\vec{j} = j\,\vec{u_z}$ uniforme.

1. Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans un volume de cylindre de rayon a et de hauteur h.
2. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ à l'intérieur du cylindre.
3. Déterminer le flux du vecteur de Poynting $\Phi(\vec{\pi})$ à travers la surface du cylindre de rayon a et de hauteur h (orientée vers l'extérieur). Conclure.

19 Bilan énergétique d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques métalliques de rayon a et d'axe Oz, de cotes respectives $-h/2$ et $+h/2$. Négligeant les effets de bord et supposant un régime lentement variable (à préciser ultérieurement), on admet que le champ électrique est, dans l'espace entre les deux armatures, uniforme et non stationnaire :

$$\vec{E} = E(t)\,\vec{u_z}$$

On étudie le système pendant la décharge du condensateur à travers un circuit extérieur au cours de laquelle $E(t)$ évolue selon la loi : $E(t) = E_0\,\exp(-t/\tau)$.

1. On cherche le champ magnétique correspondant sous la forme : $\vec{B} = B(r,t)\,\vec{u_\theta}$.

   À l'aide du théorème d'Ampère généralisé, déterminer l'expression de $B(r,t)$ en fonction de $E(t)$, r et τ.
2. En un point du volume du condensateur (entre les deux armatures), exprimer en fonction de r et de $\lambda = c\,\tau$ le rapport des contributions électrique et magnétique à la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\mu = u_{em}(B)/u_{em}(E)$$

3. Montrer que l'on a $\mu \ll 1$ en tout point du condensateur lorsque $\tau \gg \tau_C$ où τ_C est un temps caractéristique que l'on déterminera en fonction de a et c.

Lorsque cela est réalisé, il est légitime de considérer le condensateur comme un système purement électrique.

4. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ en un point intérieur au condensateur en fonction de r, $E(t)$ et τ. Commenter la direction de celui-ci.
5. Donner l'expression du flux de $\vec{\pi}$ à travers le cylindre de rayon a et de hauteur h qui délimite le condensateur, en fonction de $E(t)$, τ et du volume V de ce cylindre. Dans la limite $\tau \gg \tau_C$ des champs lentement variables, interpréter le résultat précédent à l'aide d'un bilan énergétique.