1 Décharge dans un gaz

Donnée : pour un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\vec{u}_r$ dans le système des coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a(r,t)\right)$$

Deux sphères métalliques minces (S_1) et (S_2), de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ sont séparées par un gaz initialement isolant et dont les constantes électromagnétiques peuvent être confondues avec celles du vide, c'est à dire ϵ_0 et μ_0.

Initialement, (S_2) n'est pas chargée et (S_1) porte la charge électrique Q. La sphère métallique (S_1) est creuse, c'est à dire vide de toute matière et, de la même façon, le milieu extérieur à (S_2), caractérisé par $r > R_2$, est vide lui aussi. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le gaz devient brusquement conducteur et qu'il obéit à la loi d'Ohm locale, ce qui signifie que $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$ en tout point du gaz, γ étant la conductivité électrique (grandeur supposée constante).

1) En analysant les symétries du problème, montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ne peut être que nul en tout point de l'espace. Montrer de même que, $\vec{u}_r$ désignant le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques, le champ électrique est nécessairement de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r,t)\,\vec{u}_r \text{ pour toute valeur de } r = OM$$

2) a) Déterminer à l'aide des équations de Maxwell une équation différentielle par rapport au temps, vérifiée par $E(r,t)$ pour $R_1 < r < R_2$. En déduire l'expression de $E(r,t)$ en fonction de t, r et Q. On introduira un temps caractéristique τ pour exprimer ce champ.

b) Déterminer $E(r,t)$ pour $r < R_1$ puis $r > R_2$.

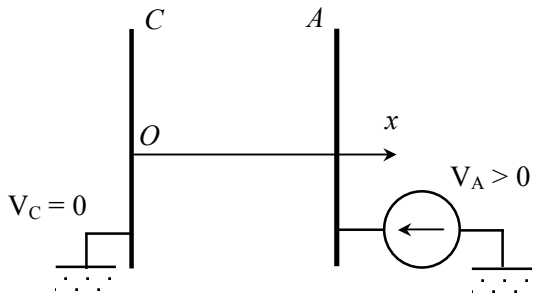
3) Que vaut la densité volumique de charges ρ dans l'espace entre les deux sphères ? Quelle est l'expression de $\vec{j}$? Est-ce compatible avec l'équation de conservation de la charge électrique ?

2 Tube à vide

Un tube à vide est constitué de deux armatures métalliques planes A et C enfermées dans une ampoule où règne le vide. La cathode C, de potentiel nul, émet par effet thermoélectrique des électrons sans vitesse initiale qui sont attirés par l'anode A maintenue au potentiel $V_A > 0$.

On étudie le régime stationnaire d'écoulement des électrons, de charge $-e$ et de masse m, de C vers A ce qui correspond à un courant d'intensité constante I.

La cathode C qui occupe le plan $x = 0$ et l'anode A, qui occupe le plan $x = L$, sont planes, parallèles et ont même surface en regard S.



1) On suppose que les grandeurs de ce problème ne dépendent que de la distance x à la cathode $(0 < x < L)$.

a) Écrire l'équation locale satisfaite par le potentiel électrique $V(x)$, en introduisant le nombre $n(x)$ d'électrons par unité de volume à l'abscisse x.

b) Quelle est la relation entre la densité volumique de courant $j(x)$, $n(x)$ et la vitesse $u(x)$ des électrons à l'abscisse x ? Relier $j(x)$ à l'intensité $I(x)$ qui traverse la surface plane d'aire S, perpendiculaire à Ox et située à l'abscisse x. Montrer que cette intensité ne dépend pas de x.

c) En utilisant l'énergie mécanique d'un électron, relier $u(x)$ à $V(x)$.

2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{K}{\sqrt{V(x)}}$$

où K est une constante à exprimer en fonction de e, m, S, ε_0 et l'intensité I.

3) a) En multipliant l'équation précédente par $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ et en intégrant, montrer que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = 2\sqrt{K}\,[\,V(x)\,]^{1/4}$$

On admettra que le champ électrique est nul au niveau de la cathode.

b) Déduire de l'équation précédente que l'intensité I du courant est liée au potentiel V_A de l'anode par la relation : $I = a\,V_A^{3/2}$ et déterminer la constante a.

Application numérique : $S = 1{,}0$ cm^2 ; $L = 2$ cm ; calculer I si $V_A = 80$ V. On donne : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m.

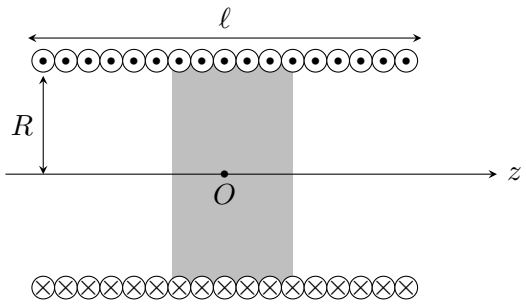
3 Solénoïde en ARQS

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On considère un solénoïde de longueur ℓ entièrement situé dans la zone ARQS. Il est formé de spires jointives circulaire d'axe Oz et de rayon R, parcourues par un courant d'intensité $i(t) = I_m\cos(\omega t)$. On note n le nombre de spires par mètre.



1) a) À quelle condition sur ω, L et R, tous les points du solénoïde sont-ils situés dans la zone A.R.Q.S. ?

b) Écrire les équations de Maxwell en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) situé à l'intérieur du solénoïde : $r < R$ et $-\ell/2 < z < \ell/2$.

On étudie le champ magnétique dans la région centrale du solénoïde (zone grisée sur le schéma), suffisamment loin des bords pour supposer qu'en tout point $M(r, \theta, z)$ de cette zone on puisse écrire :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = B_0(r,z)\,\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

2) Montrer que $B_0(r,z)$ ne dépend ni de r, ni de z. En supposant que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde, déterminer B_0 en fonction de μ_0, n et I_m.

3) a) Montrer à partir d'une équation de Maxwell qu'en tout point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z) il existe un champ électrique de la forme $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

b) On se place dans la région centrale du solénoïde (zone grisée). Montrer que $E(r,z,t)$ ne dépend pas de z et déterminer l'expression de $E(r,t)$.

c) Retrouver ce résultat à l'aide de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday.

4 Boule radioactive *

L'expression de la divergence en coordonnées sphériques d'un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ sera prise dans le formulaire ou au début de l'exercice 1.

Une boule de matière radioactive, de centre O et de rayon R, est électriquement neutre à l'instant $t = 0$. À partir de cet instant initial, elle émet depuis sa surface n positons β^+ par unité de temps, chaque positon ayant une charge élémentaire e. On suppose que l'émission est isotrope, les charges émises ayant une même vitesse radiale $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$ de norme v constante.

1) a) En étudiant la charge électrique contenue à l'instant $t > 0$ dans une coquille sphérique limitée par les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, déterminer la densité volumique de charges $\rho(r,t)$ en tout point de l'espace situé à une distance $r > R$ du centre de la boule radioactive. Que se passe-t-il si $r > R + vt$?

b) Expliciter de même le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point situé à une distance $r > R$.

2) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en tout point M tel que $r = OM > R$. Que peut-on dire du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$?

3) Quelle est la charge électrique $Q(t)$ de la boule radioactive à l'instant t ? Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss.

5 Condensateur en régime variable. Limites de l'ARQS

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon a, d'axe Oz situés dans les plans $z = +h$ et $z = -h$. On admet que $\overrightarrow{E}(M,t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$ entre les armatures du condensateur. Pour $h \ll a$, ce modèle est justifié sauf au voisinage immédiat des bords, c'est-à-dire en $r = a$. Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $f = \omega/2\pi$ et on souhaite déterminer la structure du champ électromagnétique créé à l'intérieur de celui-ci.

Formules d'analyse vectorielle :

- Laplacien d'une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindriques :

$$\triangle f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{a}) - \Delta\,\overrightarrow{a}$
- Pour $\overrightarrow{a} = f\,\overrightarrow{e_z}$ on a $\Delta\,\overrightarrow{a} = (\Delta\,f)\,\overrightarrow{e_z}$.

On cherche un champ électrique entre les deux armatures du condensateur, de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E(r,z)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

1) En utilisant une des équations de Maxwell, montrer que $E(r,z)$ ne dépend pas de z. Dans la suite on le notera $E(r)$

2) Toujours à partir des équations de Maxwell, montrer que le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ dans l'espace entre les deux armatures vérifie :

$$\triangle\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

3) En déduire que $E(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} + \frac{\omega^2}{c^2}E(r) = 0$$

4) On cherche la solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière en posant :

$$E(r) = E(0)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n$$

Établir une récurrence sur les coefficients a_n et en déduire les trois premiers termes non nuls de la série en partant de $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, hypothèses qu'on justifiera.

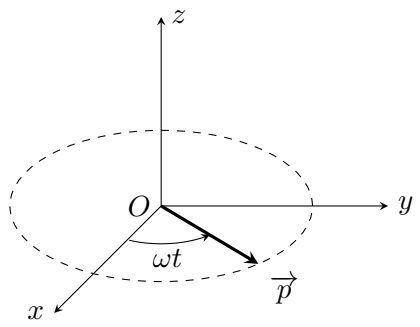
5) On pose $x = \frac{\omega r}{c}$. Montrer que si $x \ll 1$ on peut se contenter des deux premiers termes de la série entière donnant $E(r)$. Cette approximation est-elle vérifiée avec $a = 10$ cm et $f = 10$ MHz (limite supérieur d'un générateur de laboratoire usuel). À quel concept renvoit la relation $x \ll 1$?

****

RAYONNEMENT DIPOLAIRE

6 Dipôle tournant

Un dipôle électrique tourne dans le plan Oxy à la vitesse angulaire ω. En notant p la norme (constante) du moment dipolaire électrique, calculer la puissance P_{ray} rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r, en fonction de μ_0, c, p et ω.



7 Durée de vie d'un atome

Dans le modèle planétaire classique de l'atome, les électrons décrivent des orbites circulaires autour du noyau. Considérons un atome d'hydrogène dont le noyau est immobile en O et où l'électron, de masse m et de charge électrique $-e$, est en orbite à la distance constante r_e du noyau.

1. a) En supposant que la seule force exercée sur l'électron est la force électrique due au noyau, calculer l'accélération $\overrightarrow{a}(t)$ de l'électron en fonction de m, e, ε_0 et r_e.

   b) Expliciter l'énergie mécanique E de l'électron en fonction de e, ε_0 et r_e.

La puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est donnée par la formule de Larmor :

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2\,\|\overrightarrow{a}(t-r/c)\|^2}{c^3}$$

2. a) Déterminer P_{ray} en fonction de e, m, ε_0, c et r_e.

   b) Cette puissance rayonnée est prélevée sur l'énergie mécanique de l'électron. Si on suppose que l'énergie rayonnée durant une révolution de l'électron autour du noyau est très petite

devant l'énergie mécanique E, on peut considérer que l'orbite électronique est quasiment circulaire avec un rayon $r_e(t)$ qui varie lentement.

Établir à partir de considérations énergétiques l'équation différentielle vérifiée par $r_e(t)$ et en déduire l'évolution du rayon de l'orbite en fonction du temps. On notera r_0 la valeur de r_e à $t = 0$.

c) Application numérique. À $t = 0$, $r_0 = 53$ pm (rayon de Bohr). Calculer la durée τ au bout de laquelle $r_e = 0$ et la comparer à la période T de révolution de l'électron. Conclure.

****

ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

8 Calcul d'une capacité à l'aide de l'énergie

Un condensateur sphérique possède une armature interne de rayon R_1 et une armature externe de rayon $R_2 > R_1$. L'armature interne porte la charge électrique Q tandis que 'armature externe porte la charge opposée $-Q$. Le régime est stationnaire.

1. Calculer le champ électrique $\overrightarrow{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$ en tout point de l'espace entre les deux armatures.
2. En déduire la différence de potentiel $U = V(R_1) - V(R_2)$ en fonction de Q, R_1 et R_2. Quelle est alors la capacité C de ce condensateur ?
3. Calculer l'énergie électrique U_E dans l'espace entre les deux armatures. Retrouver alors l'expression de C.

9 Rayon classique de l'électron

Un électron, de charge électrique totale $-e$, est modélisé par une boule de centre O et de rayon a, uniformément chargée en volume (de densité volumique de charge ρ). On suppose l'électron immobile.

1. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace par cette distribution de charges.
2. Calculer l'énergie électrique U_E totale contenue dans tout l'espace. En supposant que cette énergie est égale à l'énergie de masse $E = m\,c^2$ de l'électron, en déduire la valeur du rayon a (rayon classique de l'électron).
3. Application numérique : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9}$ u.S.I. ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C. Calculer a

10 Inductance d'un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué d'un cylindre conducteur d'axe Oz et de rayon R_1 parcouru par un courant électrique d'intensité I (âme) entouré d'une enveloppe cylindrique de même axe Oz et de rayon $R_2 > R_1$ (on néglige l'épaisseur de cette enveloppe) parcourue par le même courant électrique I mais en sens inverse (gaine).

Les deux courants sont purement surfaciques et on leur associe une densité surfacique de courant $\vec{j}_{1S} = j_{1S}\,\overrightarrow{e_z}$ pour l'âme (c'est à dire en tout point de la surface $r = R_1$) et $\vec{j}_{2S} = -\,j_{2S}\,\overrightarrow{e_z}$ ($j_{2S} > 0$) pour la gaine (c'est à dire en tout point de la surface $r = R_2$).

Le régime est stationnaire et les deux cylindres sont supposés de longueur infinie.

1. À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ créé en tout point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z). On exprimera le résultat en fonction de I.

2. Calculer l'énergie magnétique U_B répartie dans le volume situé entre les deux plans d'abscisses $z = z_0$ et $z = z_0 + \ell$.
3. On définit l'inductance linéique λ du câble coaxial en posant :

$$U_B = \frac{1}{2}\,\lambda\ell\,I^2$$

Calculer λ en fonction de μ_0, R_1 et R_2.

11 Bilan énergétique d'un fil conducteur

Un fil cylindrique infini, d'axe Oz et de rayon a est réalisé dans un matériau conducteur de type ohmique, possédant une conductivité électrique γ. Ce fil est parcouru par un courant électrique I stationnaire, avec une densité volumique de courant $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme.

1. Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans un volume de cylindre de rayon a et de hauteur h.
2. Déterminer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\pi}$ à l'intérieur du cylindre.
3. Déterminer le flux du vecteur de Poynting $\Phi(\overrightarrow{\pi})$ à travers la surface du cylindre de rayon a et de hauteur h (orientée vers l'extérieur). Conclure.

12 Bilan énergétique d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques métalliques de rayon a et d'axe Oz, de cotes respectives $-h/2$ et $+h/2$. Négligeant les effets de bord et supposant un régime lentement variable (à préciser ultérieurement), on admet que le champ électrique est, dans l'espace entre les deux armatures, uniforme et non stationnaire :

$$\overrightarrow{E} = E(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

On étudie le système pendant la décharge du condensateur à travers un circuit extérieur au cours de laquelle $E(t)$ évolue selon la loi : $E(t) = E_0\,\exp(-t/\tau)$.

1. On cherche le champ magnétique correspondant sous la forme : $\overrightarrow{B} = B(r,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$.

   À l'aide du théorème d'Ampère généralisé, déterminer l'expression de $B(r,t)$ en fonction de $E(t)$, r et τ.
2. En un point du volume du condensateur (entre les deux armatures), exprimer en fonction de r et de $\lambda = c\,\tau$ le rapport des contributions électrique et magnétique à la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\mu = u_{em}(B)/u_{em}(E)$$

3. Montrer que l'on a $\mu \ll 1$ en tout point du condensateur lorsque $\tau \gg \tau_C$ où τ_C est un temps caractéristique que l'on déterminera en fonction de a et c.

   Lorsque cela est réalisé, il est légitime de considérer le condensateur comme un système purement électrique.
4. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\pi}$ en un point intérieur au condensateur en fonction de r, $E(t)$ et τ. Commenter la direction de celui-ci.
5. Donner l'expression du flux de $\overrightarrow{\pi}$ à travers le cylindre de rayon a et de hauteur h qui délimite le condensateur, en fonction de $E(t)$, τ et du volume V de ce cylindre. Dans la limite $\tau \gg \tau_C$ des champs lentement variables, interpréter le résultat précédent à l'aide d'un bilan énergétique.