**TD PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES
ONDES E.M. DANS LE VIDE**

1 Caractérisation d'une onde

Une onde sinusoïdale de fréquence $f = 5$ Hz est représentée en un point M de l'espace par l'expression complexe :

$$s(\overrightarrow{r}, t) = A \exp\left[\, i(3x + 4y + 5z - \omega t)\,\right]$$

$\overrightarrow{r}$ étant le vecteur position situant M dans un repère $(Oxyz)$.

1. Est-ce une onde plane ? Déterminer la célérité de propagation de cette onde ainsi que sa longueur d'onde λ.
2. Donner l'expression de cette onde lorsqu'elle se propage dans une direction normale à l'axe Oy en faisant un angle de 30° avec l'axe Oz.

2 Onde plane électromagnétique

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans le vide, dont le champ électrique complexe est :

$$\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{E}_x \overrightarrow{e_x} + \underline{E}_y \overrightarrow{e_y} \text{ avec } \underline{E}_x = E_0 \exp\, i \left[\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right]$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6{,}3.10^{-7}$ m.

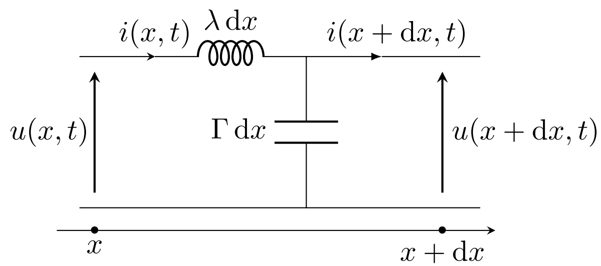
1. Calculer la valeur numérique de la fréquence de l'onde. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
2. Quelle est l'équation cartésienne d'un plan d'onde ?
3. Exprimer $\underline{E}_y$ en fonction de $\underline{E}_x$.
4. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de cette onde.

3 OPPH électromagnétique

Donner les expressions des champs électrique et magnétique d'une OPPH EM polarisée linéairement suivant $\overrightarrow{e_y}$ et se propageant dans une direction parallèle au plan xOz et faisant un angle de $\pi/4$ par rapport à Oz. On pourra appeler E_0 l'amplitude réelle du champ électrique.

4 Propagation d'une onde le long d'unu ligne bi-fillaire

Deux fils électriques parallèles et forment une ligne bifilaire de longueur L, parallèle à un axe Ox. Lorsque les pertes le long de la ligne sont négligées, on peut modéliser ces deux fils par une suite de maillons de longueur élémentaire dx (on "découpe" la ligne en tranches de longueur dx), chaque maillon étant doté d'une inductance propre λdx et d'une capacité Γdx (λ est l'inductance par unité de longueur et Γ la capacité par unité de longueur). Le schéma électrocinétique équivalent d'une tranche "dx" est donné sur la figure ci-dessous.



À l'instant t, on note $u(x,t)$ et $u(x+\mathrm{d}x,t)$ les tensions aux abscisses x et $x+\mathrm{d}x$. De même, les intensités dans le fil "du dessus" sont notées $i(x,t)$ à l'abscisse x et $i(x+\mathrm{d}x,t)$ en $x+\mathrm{d}x$.

On fera les calculs à l'ordre 1 en dx.

1. À l'aide de la loi des mailles, établir une équation reliant $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ et λ.
2. À l'aide de la loi des noeuds, établir une seconde équation reliant $\dfrac{\partial i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et Γ.
3. En déduire un équation de propagation pour chacune des deux grandeurs $i(x,t)$ et $u(x,t)$. On introduira la grandeur :
$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\lambda}}$$
dont on donnera la signification.
4. On étudie une onde progressive dans le sens des x croissants mais de forme quelconque : $i(x,t) = f(x - vt)$ et $u(x,t) = h(x - vt)$ où f et h sont deux applications à priori quelconques. Montrer à partir des questions 1. et 2. que :
$$u(x,t) = Z_c\, i(x,t)$$
et donner l'expression de Z_c en fonction de λ et Γ. Z_c est appelée *impédance caractéristique* de la ligne.

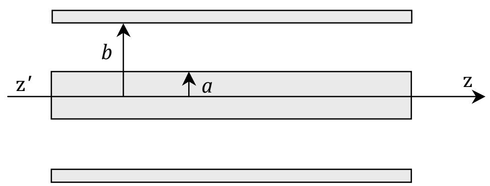
   Montrer que si les ondes se propagent dans le sens des x décroissants : $i(x,t) = f(x + vt)$ et $u(x,t) = h(x + vt)$, alors :
$$u(x,t) = -\,Z_c\, i(x,t)$$

5 Onde électromagnétique entre deux plans métalliques

Une onde électromagnétique se propage dans le vide, selon Ox, entre deux plans métalliques d'équation $z = -\,a$ et $z = a$. On admet que le champ électrique de cette onde est de la forme :
$$\overrightarrow{E}(x,z,t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\, \cos(kx - \omega t)\, \overrightarrow{u_y}$$
où E_0, a, k et ω sont des constantes.

1. Est-ce une onde plane ? Peut-on néanmoins dire qu'il y a une direction et un sens de propagation ? Est-ce une onde transverse ?
2. Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?
3. Établir à partir de l'équation d'onde vérifiée par $\overrightarrow{E}$ la relation entre k, ω, c et a. En déduire que cette onde ne peut se propager que si $\omega > \omega_0$ où ω_0 est une pulsation caractéristique à déterminer.
4. Montrer que l'onde précédente se décompose en deux ondes planes progressives dont on précisera les directions de propagation. On donne :
$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

6 Onde dans un câble coaxial



Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique intérieur de rayon a et d'une enveloppe métallique mince cylindrique, de rayon intérieur b ($b > a$). On désigne par z'z l'axe de ce câble. Un point M sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

On se place en régime sinusoïdal de pulsation ω. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant $i(z,t)$, dépendant à la fois de la côte z et du temps t, tel que sa représentation complexe soit donnée par l'expression :
$$\underline{i}(z,t) = \underline{I}(z)\ \exp(-i\omega t)$$
où $\underline{I}(z)$ est une fonction complexe à déterminer. On suppose en outre que les représentations complexes des champs électrique et magnétique

dans l'espace $a < r < b$ s'écrivent :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z,t)\,\overrightarrow{u_r} \text{ et } \overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \underline{B}(r,z,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1. À l'aide de l'expression intégrale de l'équations de Maxwell-Ampère, établir la relation entre la composante $\underline{B}(r,z,t)$ et le courant $\underline{i}(z,t)$.
2. a) Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère permet de relier le champ électrique $\underline{E}(r,z,t)$ à la dérivée par rapport à z de l'intensité du courant électrique dans le câble, soit $\partial \underline{i}/\partial z$.
   b) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, déduire une équation différentielle satisfaite par la fonction $\underline{I}(z)$.
3. Achever la résolution de ce problème en explicitant la solution de l'équation différentielle précédente, compte tenu du fait que l'on n'envisage que des ondes se propageant selon les "z croissants" et déterminer les expressions de $i(z,t) = \text{Re}[\underline{i}(z,t)]$ ainsi que du champ électromagnétique réel dans l'espace $a < r < b$.

7 Superposition de deux ondes planes progressives

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant dans le vide, respectivement selon les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Ces deux vecteurs sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy et ils font un angle α avec Ox $(0 < \alpha < \pi/2)$.

1. Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$?
2. Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à $\overrightarrow{u_y}$ et qu'ils vibrent en opposition de phase au point $O(0,0,0)$, donner leurs expressions sous forme complexe.
3. En déduire l'expression du champ électrique total, en représentation complexe, puis sa valeur réelle. Décrire l'onde obtenue : est-elle plane ? Est-elle progressive ?
4. Donner l'expression du champ magnétique : représentation complexe, puis partie réelle.

8 Câble coaxial

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs cylindriques de même axe Oz. Le premier est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur.

Données en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\overrightarrow{A} = &\left(\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right)\overrightarrow{u_r}\\ &+\left(\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta + 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right)\overrightarrow{u_\theta}\\ &+\Delta A_z\,\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

L'expression du rotationnel a déjà été donnée à l'exercice 7

On considère le câble comme infini suivant l'axe Oz. Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, constituée d'un isolant mais qu'on assimilera à du vide du point de vue de ses propriétés électromagnétique. Cette onde est définie en notation complexe par son champ électrique :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r}\, e^{i\,(\omega t - kz)}\, \overrightarrow{u_r}$$

où α est une constante réelle positive.

1. L'onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
2. On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t)$ en fonction de E_0, r, z, t, k et R_1.
3. À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω. Le milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer en fonction de E_0, r, t, ω, k et R_1, l'expression du champ magnétique complexe $\overrightarrow{\underline{B}}(r,z,t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.
5. On désigne par $\overrightarrow{\pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\pi}$ en fonction de E_0, R_1, r, k, ω, z, t et μ_0.
6. Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P, par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0. Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W. On prendra : $R_1 = 0{,}25$ mm et $R_2 = 1{,}25$ mm.

9 Pression de radiation

On se place dans la situation du cours. Une OPPS EM de pulsation ω se propage selon l'axe Ox, dans le sens $+\overrightarrow{e_x}$ et se dirige vers un plan métallique parfait, orthogonal à Ox et situé en $x = 0$. Elle subit une réflexion sur ce métal.

La théorie prévoit que le champ électromagnétique exerce sur un élément dS de surface du métal une force élémentaire de la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\left(\sigma \overrightarrow{E}(0,t) + \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{B}(0,t)\right) \mathrm{d}S$$

Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$, puis sa valeur moyenne $< \overrightarrow{\mathrm{d}F} >$ et montrer qu'on peut introduire une pression P (pression de radiation) pour caractériser cette force.

10 Cavité électromagnétique

Soient deux plans conducteurs réalisés dans un métal parfait, parallèles et situés en $x = 0$ et $x = a$ ($a > 0$). L'espace entre ces deux plans est le vide et nous supposons que le champ électrique entre ces deux plans peut s'écrire :

$$\overrightarrow{E} = f(x)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}$$

où f est une fonction à déterminer.

1. Commenter la forme du champ électrique (on peut donner au moins deux adjectifs).
2. Déterminer l'équation vérifiée par f en utilisant l'équation de propagation.
3. Quelle condition doit satisfaire $f(x)$ en $x = 0$ et $x = a$?
4. Expliciter la fonction f convenable pour cette situation physique et montrer que la propagation n'est possible que si la fréquence de l'onde est un terme d'une suite de fréquences (f_n) dont on explicitera les termes.

5. Á l'aide de l'équation de Maxwell - Faraday, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B_n}$ pour chaque valeur f_n de la fréquence.

11 Onde entre deux plans métalliques

L'espace est rapporté au repère $(Oxyz)$. Les plans $y = 0$ et $y = a$ $(a > 0)$ sont deux plans métalliques parfaitement conducteurs et on étudie la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω entre ces deux plans (le milieu entre les deux plans est le vide). Par hypothèse, nous supposerons que le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\overrightarrow{E} = f(y)\cos(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_z}$$

où $f(y)$ et k sont respectivement une fonction et un paramètre dont nous allons chercher les expressions.

1. En utilisant l'équation de propagation établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction f.
2. Expliciter tous les types de solution selon le signe de la grandeur $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}$.
3. Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par $\overrightarrow{E}$ sur les deux plans métallique, montrer que $f(y)$ s'écrit :
$$f(y) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$
où E_0 est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer et où $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Pour un n fixé, quelle est alors la relation qui relie ω et k (cette relation s'appelle relation de dispersion) ? Quelle est la pulsation minimale ω_{min} que doit avoir une onde pour se propager ?
5. Considérons le terme propagatif $\cos(\omega t - kx)$. Expliciter les vitesses de phase et de groupe en fonction de ω.