DEVOIR SURVEILLÉ n°5bis (Centrale - Mines)
Samedi 7 janvier 2017 - Durée : 2 heures

1 Relations fondamentales de la magnétohydrodynamique

Afin d'expliquer l'existence du champ magnétique terrestre, on modélise le noyau externe de la Terre par un métal conducteur (de conductivité électrique σ et de perméabilité magnétique μ_0) et liquide. Ainsi, ce liquide peut être animé de mouvements ; on supposera que l'écoulement newtonien est décrit par un champ des vitesses $\overrightarrow{v}$ non relativiste par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ lié à la Terre ; ce métal en fusion peut être le siège de courants, décrits par la densité de courant $\overrightarrow{j}$.

Nous nous proposons d'établir les relations électromagnétiques fondamentales de la magnétohydrodynamique dans un tel milieu.

1. (a) Écrire les équations de Maxwell dans le milieu proposé, en notant ρ_e la densité volumique de charge et $\overrightarrow{j}$ la densité volumique de courant.
   (b) On note respectivement T et L le temps et la distance caractéristiques de variation des champs et de l'écoulement. Exprimer l'ordre de grandeur de la norme V de la vitesse, et du rapport $\dfrac{E}{B}$ en fonction de T et L.
   (c) En déduire que la contribution du courant de déplacement $\overrightarrow{j}_d = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ est négligeable devant les deux autres termes de l'équation de Maxwell-Ampère, dans l'hypothèse d'un écoulement non relativiste.
   Nous nous placerons désormais dans le cadre de cette approximation.
2. Une particule P du fluide conducteur se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}(P,t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Dans son référentiel propre $\mathcal{R}$' (qui est par définition un référentiel se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(P,t)$ par rapport à $\mathcal{R}$), cette particule de fluide est soumise à des champs électrique $\overrightarrow{E}'(P,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B}'(P,t)$. On suppose que dans le référentiel $\mathcal{R}$', la loi d'Ohm locale s'applique à la particule de fluide P, immobile dans $\mathcal{R}$', de sorte que $\overrightarrow{j}' = \sigma \overrightarrow{v}'$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{E}'$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et des champs électrique $\overrightarrow{E}(P,t)$ et magnétique $\overrightarrow{B}(P,t)$ auxquels est soumise la particule de fluide P dans le référentiel $\mathcal{R}$, toujours dans l'hypothèse de mouvements non relativistes ($v \ll c$). On pourra utiliser l'invariance de la force de Lorentz par changement de référentiel.
   (b) Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{j}'$ et la densité de courant $\overrightarrow{j}$ mesurée dans $\mathcal{R}$, si on considère que le fluide n'est pas chargé. On rappelle qu'il y a invariance de la charge par changement de référentiel.
   (c) En déduire que la relation traduisant la loi d'Ohm locale dans $\mathcal{R}$ s'écrit :
   $$\overrightarrow{j} = \sigma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$
   Dans la suite on se placera toujours dans le référentiel $\mathcal{R}$.
3. (a) Rappeler l'équation de conservation de la charge électrique et en déduire la loi d'évolution de la densité de charge dans le milieu conducteur. On ne cherchera pas à la résoudre pour l'instant.
   (b) Préciser l'évolution de ρ_e pour un conducteur au repos. Calculer la constante de temps caractéristique de cette évolution pour le cuivre. Commenter.

(c) Pour un conducteur en mouvement, donner l'expression de la densité de charge en régime stationnaire et expliquer pourquoi la présence d'une densité volumique de charge non nulle est nécessaire.

(d) L'expérience *VKS2* (CEA, Cadarache, France) cherchant à reproduire l'"effet dynamo" du noyau terrestre met en œuvre du sodium liquide en rotation à la vitesse angulaire $\omega = 1000\ tour.s^{-1}$ en présence d'un champ magnétique $B = 50\ Gauss$. Donner un ordre de grandeur de ρ_e pour cette expérience et la comparer à la densité de charges libres dans le sodium.

4. Montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de $\overrightarrow{B}$, dite *équation d'induction*, s'écrit
$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) + \lambda \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{B}$$
En déduire que l'évolution temporelle de $\overrightarrow{B}$ est la somme de deux termes : un terme d'induction et un terme de diffusion. Préciser l'expression de λ. Comment pourrait-on nommer cette constante ?

On précise que l'équation de diffusion de la chaleur s'écrit $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ *où* T *est la température et où* D *est le coefficient de diffusion thermique.*

5. On considère que l'écoulement conducteur occupe un volume V délimité par une surface Σ et qu'en dehors de V, le fluide est au repos et $\overrightarrow{B}$ est nul.
On cherche à interpréter énergétiquement l'équation d'induction. Pour cela, on multiplie cette équation, au sens du produit scalaire, par une grandeur bien choisie avant de sommer sur tout l'espace. Montrer alors que la variation temporelle d'énergie magnétique fait intervenir la contribution d'un terme d'induction que l'on ne cherchera pas à expliciter davantage et d'un terme diffusif dont on montrera qu'il correspond à un terme de perte par effet Joule (on l'exprimera à l'aide de j^2/σ et on commentera son signe).

6. Dans quelle condition simple l'équation d'induction devient-elle une équation de diffusion pour le champ $\overrightarrow{B}$? En supposant qu'il n'y a pas de champ imposé aux limites, comment évolue nécessairement $\overrightarrow{B}$? Préciser le temps caractéristique de cette évolution et estimer son ordre de grandeur dans le cas du noyau terrestre (conductivité électrique du noyau : $\sigma_{noyau} = 4,5 \times 10^5\ S.m^{-1}$ et $R_{noyau} = 2000\ km$). Conclure.

Données numériques

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19}$ C
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Conductivité du cuivre (à 20 °C)	$\sigma_{Cu} = 59,6 \times 10^6$ S.m^{-1}
Conductivité du sodium (à 100 °C)	$\sigma_{Na} = 10,3 \times 10^6$ S.m^{-1}
Masse volumique du sodium	$\rho_{Na} = 900$ kg.m^{-3}
Masse molaire du sodium	$M_{Na} = 23,0$ g.mol^{-1}
Le gauss (G) est une unité de champ magnétique telle que	1G = 10^4 T.

Formulaire

$$div(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}\text{div}\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}\text{div}\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\Delta \overrightarrow{A}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{A} \wedge \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)$$

2 Solénoïde en régime lentement variable

On considère un solénoïde d'axe Oz, de longueur $b = 50cm$, de rayon $a = 1cm$, comportant n spires par unité de longueur, parcourues par un courant circulant dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz et dont l'intensité est donnée par :

$$i(t) = I_0 e^{-\dfrac{t}{\tau}}$$

1. (a) Sachant que le solénoïde est équivalent à une inductance $L \simeq 1mH$ en série avec une résistance $R \simeq 100\Omega$, en déduire l'expression du temps τ caractéristique des variations du courant en fonction de L et R ainsi que son ordre de grandeur.
   (b) En déduire que le courant de déplacement $\overrightarrow{j}_d = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ est négligeable par rapport au courant $\overrightarrow{j}$ dû au déplacement des charges libres dans le matériau du solénoïde, sachant que ce dernier est en cuivre.
   On donne la conductivité du cuivre : $\gamma_{Cu} = 6 \times 10^7\ S.m^{-1}$.
   (c) En déduire sans calcul une expression permettant de décrire le champ magnétique au milieu du solénoïde.
2. En utilisant les symétries du problème, en considérant le solénoïde comme infini, montrer que le champ électrique généré est de la forme $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{u}_\theta$.
3. En utilisant la loi de Faraday sur un contour que l'on précisera, calculer le champ électrique à l'intérieur du solénoïde.
4. (a) Montrer que la densité volumique d'énergie électrique u_e est négligeable devant la densité d'énergie magnétique u_m dans le solénoïde.
   (b) Calculer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$.
   (c) Que vaut la puissance volumique des forces de Lorentz à l'intérieur du solénoïde ?
   (d) Vérifier que l'équation locale de Poynting est bien vérifiée dans le solénoïde.
   On donne, en coordonnées cylindriques :
$$\text{div}\ \overrightarrow{a}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$
5. (a) Calculer les énergies électrique U_e et magnétique U_m dans une portion de solénoïde de longueur h. Montrer qu'on retrouve là encore que l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique dans la portion de solénoïde.

(b) Montrer qu'on retrouve ici l'expression d'une inductance L de cette portion du solénoïde. Commenter l'expression obtenue.

(c) Calculer le flux du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ à travers la portion de solénoïde.

(d) Vérifier que le bilan global d'énergie est bien vérifié.