Correction - DS n°5 (CCP - e3a)
Samedi 7 janvier 2017 - Durée : 2 heures

1 Solénoïde en régime lentement variable

1. (a) $\tau = \dfrac{L}{R} = 10^{-5}\,\text{s} = 10\,\text{ms}.$

   (b)

$$\frac{||\vec{j}_D||}{||\vec{j}||} = \frac{\varepsilon_0 \left\|\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|}{\gamma ||\vec{E}||} \ll 1 \quad \text{implique} \quad \frac{\varepsilon_0 \left\|\vec{E}\right\|}{\gamma\tau ||\vec{E}||} \ll 1 \qquad \text{et donc} \qquad \frac{\varepsilon_0}{\gamma\tau} \ll 1 \Rightarrow \boxed{\tau \gg \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

   Pour du cuivre, dont la conductivité électrique vaut $\gamma = 6\times 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, on obtient :

$$\tau \gg \frac{1}{6\times 10^7 \times 36\pi \times 10^9} \simeq 10^{-19}\ \text{s}$$

   Cette condition est vérifiée très largement dans le cas du solénoïde, donc on pourra effectivement négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.

   (c) Puisque le courant de déplacement est négligeable, le champ $\vec{B}$ se calcule comme en statique, avec $i(t)$:

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t)\vec{u}_z = \mu_0 n I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_z$$

   à l'intérieur du solénoïde, $\vec{0}$ à l'extérieur.

2. Par invariance par rotation d'angle θ et translation selon Oz car le solénoïde peut être considéré comme infini, $\vec{E}(r)$. Dans la région sans charges, la seule source de champ $\vec{E}$ est le champ $\vec{B}$, via l'équation $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Par analogie avec la magnétostatique, $\vec{E}$ est donc orthogonal à un plan de symétrie de $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En un point M donné, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, d'où $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$.

3. La loi de Faraday donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{l} = E(r,t)2\pi r = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B}.d\vec{S}\right) = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt}$$

   en choisissant comme contour Γ le cercle d'axe Oz et de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique autour de Oz.

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_\theta$$

4. (a) $u_e = \dfrac{\epsilon_0}{2}\left(\dfrac{r}{2\tau}\right)^2 B^2(t)$, et $u_m = \dfrac{B^2(t)}{2\mu_0}$.

   Le rapport $\left(\dfrac{u_e}{u_m}\right)$ vaut donc :

$$\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau}\right)^2$$

avec $|r| \leq a$. Or $\dfrac{a}{2\tau} \leq \dfrac{10^{-2}}{2 \times 10^{-3}} = 5\ m.s^{-2} \ll c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$, donc dans ce cadre (qui correspond ici à celui de l'ARQS), ce rapport est négligeable, et

$$u_{em} \simeq u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$$

(b) $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{r}{\tau} \dfrac{B^2(t)}{2\mu_0} \vec{u}_r$.

(c) L'espace à l'intérieur du solénoïde est vide, donc $\mathcal{P}_v = \vec{j}.\vec{E} = 0$.

(d) On a $div\left(\vec{\Pi}\right) = \dfrac{B^2(t)}{2\mu_0 \tau} div(r\vec{u}_r) = \dfrac{B^2(t)}{\mu_0 \tau}$. De plus, $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} = \dfrac{-2}{\tau} \times \dfrac{B^2(t)}{2\mu_0}$.
On vérifie donc bien l'équation de Poynting à l'intérieur du solénoïde ($r < a$) : $div\vec{\pi} + \dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j}.\vec{E}$.

5. (a) Pour une portion de solénoïde de longueur h, $U_e = \dfrac{\epsilon_0 \pi a^4 h}{16\tau^2} B^2(t)$ et $U_m = \dfrac{B^2(t)}{2\mu_0} \pi a^2 h$.
D'où $\dfrac{U_e}{U_m} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{a}{c\tau}\right)^2 \ll 1$ à nouveau.

(b) Par identification avec l'expression $U_m = \dfrac{1}{2} L i(t)^2$, on obtient : $\boxed{L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h}$. On retrouve bien la même expression qu'en calculant directement L à partir de l'auto-induction :

$$\Phi_{tot} = Li(t) = N\Phi_{1\ spire} = N\left(B(t)\pi a^2\right) = N\mu_0 \frac{N}{h} \pi a^2 i(t) = \mu_0 n^2 \pi a^2 h i(t)$$

(c) $\Phi(t) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\pi}(r = a, t).d\vec{S} = \pi a^2 h \dfrac{B^2(t)}{\tau \mu_0}$

(d) On a bien $\dfrac{dU_{em}(t)}{dt} + \Phi(t) = 0$. L'énergie est donc bien conservée.

2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

Première partie : propagation dans le vide

1. On se place dans un milieu non chargé et non conducteur : $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$
Les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -(\partial \vec{B}/\partial t)_M \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0 = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)_M) = \mu_0\varepsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)_M \end{cases}$$

En utilisant la formule d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = -\Delta\vec{E} + \overrightarrow{grad}(div\vec{E})$
On obtient : $\overrightarrow{rot}(-(\partial\vec{B}/\partial t) = -(\partial\overrightarrow{rot}(\vec{B})/\partial t) = -\mu_0\varepsilon_0(\partial^2\vec{E}/\partial t^2) = -\Delta\vec{E}$
Le champ électrique vérifie l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0(\partial^2\vec{E}/\partial t^2)}$
$\vec{B}$ vérifie la même équation que $\vec{E}$: $\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0(\partial^2\vec{B}/\partial t^2)}$

2. Une onde est dite plane si, à un instant t, l'ensemble des points M tels que $\vec{E}$(M,t) et $\vec{B}$(M,t) sont constants, forment des plans.

3.1 $\vec{E}$(M,t) a la même expression à l'instant t, en tout point M du plan z = cte : il s'agit bien du champ d'une onde plane se propageant selon z'z dans le sens des z croissants.
En remplaçant dans l'équation de propagation projetée sur Ox , on obtient : $\varepsilon_0.\mu_0.c^2 = 1$

3.2 L'onde est une onde plane **progressive :** $\vec{B} = (1/c)\,\vec{e_z} \wedge \vec{E} = (E_0/c)\cos\omega(t-z/c)\,\vec{e_y}$

4.1 Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$. La puissance rayonnée par l'onde à travers une surface S est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface.
Π s'exprime en $W.m^{-2}$.

4.2 $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0 = \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\right) cos^2(\omega\left(t-\frac{z}{c}\right))\vec{e_z}$
$<\vec{\Pi}> = \left(\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\right)\vec{e_z} = (\varepsilon_0 E_0^2 c/2)\,\vec{e_z}$

5. $P = <\Pi> S$ d'où $E_0 = \sqrt{2P/\varepsilon_0 cS}$

6. L'antenne doit être parallèle au champ électrique, ici parallèle à x'x : le champ électrique met ainsi en mouvement les électrons du métal grâce à la force de Lorentz créant un courant d'intensité de même fréquence.

7. 1 $\Phi = \iint_{cadre} \vec{B}\,.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{cadre} \frac{(E_0}{c}) \cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right) dxdz$
$\Phi = (2E_0a/\omega)\sin(\omega a/2c)\cos(\omega(t-(z_0+a/2)/c))$
Loi de Faraday : $e = -d\Phi/dt = 2E_0 a \sin(\omega a/2c)\sin(\omega(t-(z_0+a/2)/c))$

7.2 $U_{eff} = \sqrt{2}\,E_0\,a\,|\sin(\omega a/2c)|$

8. L'amplitude de e est maximale quand $|\sin(\omega a/2c)|=1$ donc $\omega_{max} = (2n+1)\pi a/c$ (n entier)
Elle est nulle quand $|\sin(\omega a/2c)|=0$ donc $\omega_{min} = 2n\pi a/c$ (n entier)