DEVOIR SURVEILLÉ n°6 (CCP - e3a)
Samedi 21 janvier 2017 - Durée : 4 heures

1 Étude d'une onde électromagnétique

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide. Dans une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le champ électrique prend la forme

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{lcl} E_x & = & 0 \\ E_y & = & \dfrac{E_0}{2}\cos\left[\omega\left(\dfrac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right] \\ E_z & = & \dfrac{E_0\sqrt{3}}{2}\cos\left[\omega\left(\dfrac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right] \end{array} \right.$$

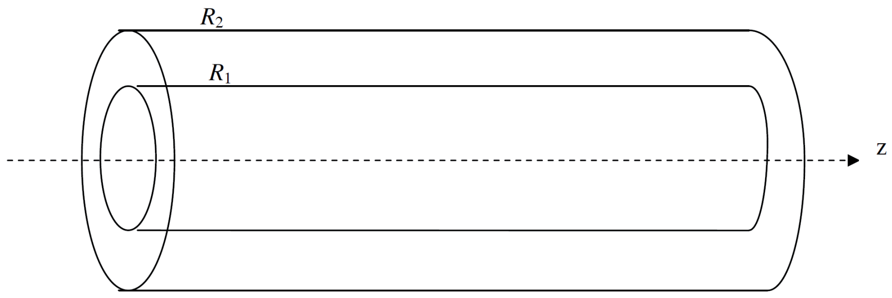
1. Montrer que E_z vérifie l'équation de propagation de d'Alembert dans le vide à une condition sur v que l'on précisera.
2. Quelle est la polarisation de cette onde ? Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_P}$ associé à la direction de polarisation.
3. Quel est le vecteur d'onde de cette onde ? Dans quelle direction cette onde se propage-t-elle. On donnera le vecteur unitaire $\vec{u}$ de la direction de propagation ?
4. Déterminer l'expression du champ magnétique associé.
5. L'onde est-elle transverse ?

2 Câble coaxial

Donnée : rotationnel en cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Un câble coaxial est formé de deux conducteurs supposés parfaits, de même longueur ℓ , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur. On négligera les effets de bord. L'espace inter-conducteur sera assimilé à du vide. On donne : $R_1 = 0{,}25$ mm, $R_2 = 1{,}25$ mm et $\ell = 100$ m.



Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique complexe :

$$\underline{\vec{E}}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{u}_r$$

où α est une constante positive.

1. L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
2. On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\overrightarrow{\underline{E}}(r, z, t)$ en fonction de E_0, r, z, k, ω, t et R_1.
3. À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω. Le milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\overrightarrow{\underline{B}}(r, z, t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près. Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle. Justifier pourquoi on qualifie la structure de cette onde de *localement plane.*
5. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\pi}$ associé à cette onde électromagnétique.
6. Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P par le câble. Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de $10W$.

3 Propagation d'ondes électromagnétiques

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autre, de mesurer la hauteur des océans.

Dans une première partie, le problème étudie la trajectoire de ce satellite au-dessus de l'ionosphère, d'abord en considérant la Terre comme sphérique, puis en prenant en compte sa non-sphéricité. La seconde partie du problème aborde la diffusion des ondes radar sur l'océan et la troisième partie étudie l'influence de l'ionosphère sur la propagation de telles ondes.

Seule la troisième partie sera abordée dans ce problème.

Notations

Dans tout le problème, $\langle f(M, t)\rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur $f(M, t)$.

La pulsation ω sera toujours réelle, positive, non nulle.

À toute grandeur réelle $f(M, t) = A(M)\cos\big(\omega t - \varphi(M)\big)$, on pourra associer la grandeur complexe $\underline{f}(M, t) = A(M)\exp i\big(\omega t - \varphi(M)\big)$.

Le nombre imaginaire i est tel que $i^2 = -1$.

La polarisation d'une onde électromagnétique fera référence au champ électrique.

Données utiles

Masse d'un proton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Masse d'un électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H · m^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^8$ m · s^{-1}
Constante de gravitation	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
Masse de la Terre	$M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6378$ km
Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique	$\omega_T = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad · s^{-1}

Formulaire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$

Gradient d'un champ scalaire V en coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données de l'énoncé.

III.A – Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1) Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants.

Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?

III.A.2) Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

III.A.3) On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).

III.A.4) À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

III.A.5) Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.

III.A.6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

III.B – Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1) En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{\jmath}(M,t)$, établir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\vec{\jmath}}(M,t)$.

III.B.2) On considère une onde du type $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose, en notation complexe, la relation d'Ohm : $\underline{\vec{\jmath}}(M,t) = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}(M,t)$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

Réécrire l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\gamma}$.

À quelle condition sur $\underline{k}$ et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

III.B.3) On pose $\underline{k} = k_1 + i\,k_2$, avec k_1 et k_2 réels.

a) Écrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$.

b) Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1, la partie réelle de $\underline{k}$. Donner une interprétation du signe de k_1. Quel phénomène physique traduit k_2, la partie imaginaire de $\underline{k}$?

Que dire si le produit $k_1\,k_2$ est positif ? Que dire si le produit $k_1\,k_2$ est négatif ?

c) Définir par une phrase la vitesse de phase v_φ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies.

III.B.4) Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\underline{\vec{E}}(M,t)$, $\underline{\vec{k}}$ (vecteur d'onde complexe) et $\underline{\vec{B}}(M,t)$. Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ et montrer que l'expression du champ réel $\vec{B}(M,t)$ s'écrit :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{k_1}{\omega}E_0\,e^{k_2 x}\cos(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_z - \frac{k_2}{\omega}E_0\,e^{k_2 x}\sin(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_z$$

Que dire des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ si k_2 est non nul ?

III.B.5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}(M,t)\rangle$. Commenter.

III.B.6) Une onde incidente, $\underline{\vec{E}}_i(M,t) = E_{0i}\exp i(\omega t - \underline{k}_A x)\,\vec{e}_y$ où $E_{0i} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k}_A = k_{A1} + i\,k_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B).

Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\underline{\vec{E}}_r(M,t) = \underline{E}_{0r}\exp i(\omega t + \underline{k}_A x)\,\vec{e}_y$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\underline{\vec{E}}_t(M,t) = \underline{E}_{0t}\exp i(\omega t - \underline{k}_B x)\,\vec{e}_y$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + i\,k_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B).

On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par

$$R = \frac{\left\langle\left\|\vec{\Pi}_r(O,t)\right\|\right\rangle}{\left\langle\left\|\vec{\Pi}_i(O,t)\right\|\right\rangle} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\left\langle\left\|\vec{\Pi}_t(O,t)\right\|\right\rangle}{\left\langle\left\|\vec{\Pi}_i(O,t)\right\|\right\rangle}$$

où $\vec{\Pi}_i(O,t)$, $\vec{\Pi}_r(O,t)$ et $\vec{\Pi}_t(O,t)$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point O de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\|\vec{A}\|$ désigne le module du vecteur $\vec{A}$).

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra s'aider des relations de passage du champ électromagnétique en $x = 0$, rappelées ci-dessous dans le cas ou les densités superficielles de charge σ et de courant $\overrightarrow{j_S}$ sont nulles :

$$\overrightarrow{E}(x=0^+,t) = \overrightarrow{E}(x=0^-,t) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(x=0^+,t) = \overrightarrow{B}(x=0^-,t)$$

a) Justifier l'écriture du champ $\underline{\vec{E}}_r(M,t)$.

b) Donner les expressions de R et de T en fonction des données précédentes.

c) Que vaut la somme $R + T$? Quelle est la signification de cette égalité ?

d) Que dire des coefficients R et T si $k_{B1} = 0$? Quelle en est la signification ?

Ne pouviez-vous pas prévoir ce résultat dès les questions **III.B.4** ou **III.B.5** ?

e) Connaissez-vous un exemple similaire en électrocinétique ?

III.C – Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e, égale à $n_1 = 1{,}00 \times 10^{11}\ \mathrm{m^{-3}}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_C, égale aussi à n_1, l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\exp i(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau $\underline{k} = k_1 + i\,k_2$, avec k_1 et k_2 réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans toute la suite, vous pourrez utiliser les résultats démontrés dans la **partie III.B**.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant c).

III.C.1) En admettant que le rapport $\omega/|\underline{k}|$ est de l'ordre de c, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

III.C.2) En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_i$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i\dfrac{n_1 e^2}{m_e\omega}$.

III.C.3) Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

III.C.4) Établir l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?

III.C.5) On se place dans le cas $\omega < \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c (on prendra k_2 négatif).

b) Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue.

c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$ dans le plasma.

III.C.6) On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c. Commenter.

b) Donner les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs).

c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$.

d) Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p, ω et c. Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ?

e) Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p, ω et c. Donner la signification physique de cette vitesse.

f) Comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c. Que penser du fait que $v_\varphi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

III.C.7) Le choix de la fréquence des ondes radars émises par Jason 2 ($f = 13{,}6$ GHz) vous semble-t-il correct ?