CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ n°6 (CCP - e3a)

1 Étude d'une onde électromagnétique

1. Le champ électrique est de la forme

$$\overrightarrow{E} = \left| \begin{array}{lcl} E_x & = & 0 \\ E_y & = & \dfrac{E_0}{2} \cos\left[\omega\left(\dfrac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right] \\ E_z & = & \dfrac{E_0\sqrt{3}}{2} \cos\left[\omega\left(\dfrac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right] \end{array} \right.$$

L'équation de propagation dans le vide est l'équation de d'Alembert

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

où c est la célérité de l'onde dans le vide et Δ est l'opérateur laplacien vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par

$$\Delta\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

et de même pour E_y et E_z.
Ici, l'équation de propagation se décompose sur les 3 vecteurs de base $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$ et $\overrightarrow{u}_z$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta E_x - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & = & 0 \\ \Delta E_y - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & = & 0 \\ \Delta E_z - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} & = & 0 \end{array} \right.$$

Il reste à vérifier l'équation pour E_z.

$$\Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

avec

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{3}\,E_0}{2}\frac{\omega^2}{(2v)^2} 3 \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right]$$

et

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\frac{\sqrt{3}\,E_0}{2}\frac{(\omega)^2}{(2v)^2} \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right]$$

D'autre part, E_z ne dépend pas de x donc

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0$$

On en déduit

$$\Delta E_z = -\frac{\omega^2}{v^2}\frac{\sqrt{3}\,E_0}{2} \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right]$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 \, \frac{\sqrt{3}\, E_0}{2} \, \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2v} - t\right)\right]$$

L'équation de propagation suivant $\overrightarrow{u}_z$

$$\Delta E_z - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

est vérifiée si $v^2 = c^2$ soit $\boxed{v = c}$

2. La polarisation est rectiligne : on vérifie qu'on peut écrire le champ de telle façon que sa direction est fixe au cours du temps :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2c} - t\right)\right]\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u}_z\right]$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{u_P} = \left[\frac{1}{2}\,\overrightarrow{u}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{u}_z\right]}$$

3. Le vecteur d'onde est tel que :

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\omega}{2c}\,(\sqrt{3}y - z)$$

On en déduit

$$\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

On vérifie bien que : $||\overrightarrow{k}|| = \dfrac{\omega}{c}$ dans le vide. On vérifie également que le champ $\overrightarrow{E}$ est bien transverse car : $\vec{k}.\vec{E} = 0$.

4. Pour calculer $\overrightarrow{B}$ on peut utiliser la relation de structure car l'onde est ici une OPPH :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}\,\vec{u}_x\,\cos\left[\omega\left(\frac{\sqrt{3}y - z}{2c} - t\right)\right]$$

On vérifie bien que dans le vide $||\overrightarrow{B}|| = \dfrac{||\overrightarrow{E}||}{c}$.

5. On vérifie bien que l'onde est transverse et que $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k})$ forment un trièdre direct.

2 Câble coaxial. D'après CCP-PSI-2011

1°) L'onde est progressive et se propage selon les z croissant. Mais elle n'est pas plane.
2°) L'amplitude du champ est maximale en $r=R_1$. On peut donc remplacer α par E_oR_1.

3°) Idem, aucun pb particulier. On retombe ici sur $k=\omega/c$ et le milieu n'est pas dispersif.

4°) On utilise ici l'équation de Maxwell-Faraday, qu'on intègre par rapport au temps. Il apparaît alors une fonction quelconque de l'espace, soit donc un champ magnétostatique. Ce champ n'est absolument pas lié à l'onde et on peut donc l'ignorer compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell.
On obtient : $\vec{B} = \frac{k}{\omega}.\frac{E_oR_1}{r}.e^{j(\omega t-kz)}\vec{u}_\theta$. On aurait pu remplacer k/ω par 1/c.
Localement, l'onde a la même structure que l'onde plane.

5°) $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_o} = \frac{k}{\mu_o\omega}\left(\frac{E_oR_1}{r}\right)^2.cos^2(\omega t-kz)\vec{u}_z$ après être revenu en notation réelle.

6°) La puissance moyenne transportée est la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble entre $r=R_1$ et $r=R_2$. L'élément de surface élémentaire est $\overrightarrow{dS} = 2\pi r dr \vec{u}_z$, on intègre de $r=R_1$ à $r=R_2$ et on fait la moyenne temporelle.
On obtient : $P = \frac{\pi R_1^2 E_o^2}{\mu_o c} Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Pour P=10W, on calcule E_o=109 kV.m^{-1}.

Question 3 : $\Delta\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$ conduit à $\left[\dfrac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E}{\partial r}-\dfrac{E}{r^2}\right] = -k^2E = \dfrac{-\omega^2}{c^2}E$, donc $k = \dfrac{\omega}{c}$ car les termes se simplifient.

Question 5 : on vérifie bien que le vecteur de Poynting est parallèle à $\overrightarrow{k}$.

3 Étude d'une onde électromagnétique. Central MP 2012

III.A Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1 Les deux relations $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0 \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ forment les équations de structure, tandis que $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ sont les équations aux sources.
On transforme les équations aux divergences par application du théorème d'Ostrogradski en intégrales de flux à travers des surfaces fermées $(\mathcal{S})$, $\boxed{\oint_{(\mathcal{S})}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0}$ (conservation du flux magnétique) et $\boxed{\oint_{(\mathcal{S})}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}Q_{\text{int}}}$ (théorème de Gauss). On transforme de même les équations aux rotationnels par application du théorème de Stokes en intégrales de circulation sur des contours fermés $(\mathcal{C})$, $\boxed{\oint_{(\mathcal{C})}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$ (loi de l'induction de Faraday) et $\boxed{\oint_{(\mathcal{C})}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mu_0\left(I+\int\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right)}$ (théorème d'Ampère généralisé).

III.A.2 Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; on établir l'équation de propagation en calculant de deux manières $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$, d'une part comme $-\Delta\vec{E}$ puisque $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ et d'autre part comme $-\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; finalement, on obtient bien sûr (dans le vide) l'équation de d'Alembert $\boxed{\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$.

III.A.3 L'onde proposé est une onde électromagnétique plane, progressive (de sens de propagation $\vec{e}_x$), monochromatique (de pulsation ω), polarisée rectilignement selon (Oy).

III.A.4 Si on reporte cette forme dans l'équation de d'Alembert, on obtient $k^2 = \omega^2/c^2$ donc ici $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$; c'est l'équation de dispersion. On en déduit que les vitesses de phase ω/k et de groupe $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ sont des constantes indépendantes de la fréquence : le milieu est donc $\boxed{\text{non dispersif}}$.

III.A.5 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans ce cas $\omega\underline{\vec{B}} = \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ donc $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\exp\imath(\omega t - kx)\vec{e}_z$ soit en notation réelle $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z}$.

III.A.6 En utilisant les expressions réelles des champs, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ s'écrit ici $\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e}_x}$. Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S est la puissance électromagnétique rayonnée à travers cette surface.

III.B Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1 Il suffit ici de reprendre les méthodes ci-dessus, $\boxed{\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$.

III.B.2 Posant $\underline{\vec{j}} = \gamma\underline{\vec{E}}$, il vient donc $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}}$. Pour une onde plane progressive et monochromatique, $\frac{\partial}{\partial t} = \imath\omega$ et $\vec{\nabla} = -\imath\underline{k}\vec{e}_x$ et cette équation de propagation impose l'équation de dispersion $\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \imath\omega\mu_0\gamma}$.

III.B.3 <u>**a.**</u> Il suffit de remarquer que $-\imath\underline{k}x = -\imath k_1 x + k_2 x$ pour en déduire, en repassant aux parties réelles, l'expression demandée, $\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 e^{k_2 x}\exp\imath\left(\omega t - k_1 x\right)\vec{e}_y}$.

<u>**b.**</u> k_1 est le $\boxed{\text{vecteur d'onde}}$ qui décrit la propagation de l'onde ; le signe de k_1 définit le sens de propagation (selon $+\vec{e}_x$ si $k_1 > 0$). La partie imaginaire k_2 décrit une $\boxed{\text{absorption}}$ ou une $\boxed{\text{amplification}}$ de l'onde, selon que le module de $\vec{E}$ est décroissant ou croissant lors de la propagation.
Si $k_1 k_2 > 0$, l'amplitude de l'onde $\boxed{\text{augmente}}$ lors de la propagation ; le milieu est donc amplificateur. Au contraire, si $k_1 k_2 < 0$, l'amplitude de l'onde $\boxed{\text{diminue}}$ lors de la propagation ; le milieu est donc absorbant.

<u>**c.**</u> La vitesse de phase est la vitesse de propagation du terme de phase $k_1 x - \omega t$, qu'on écrit aussi $k_1(x - v_\varphi t)$ avec donc $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}}$.

III.B.4 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{\underline{k}}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}}$; elle montre que les champs réels électrique et magnétique sont $\boxed{\text{déphasés}}$ si k_2 est non nul ; ce déphasage est $\Delta\phi = \arg(\underline{k})$.

III.B.5 Revenant aux parties réelles, $\vec{E} = E_0 e^{k_2 x}\cos\left(\omega t - k_1 x\right)\vec{e}_y$ tandis que du champ complexe $\underline{\vec{B}} = \frac{k_1 + \imath k_2}{\omega} e^{k_2 x}\exp\imath\left(\omega t - k_1 x\right)\vec{e}_z$ on déduit $\vec{B} = e^{k_2 x}\frac{k_1\cos(\omega t - k_1 x) - k_2\sin(\omega t - k_1 x)}{\omega}\vec{e}_z$; on en déduit donc $\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0\omega}\left[k_1\cos^2\left(\omega t - k_1 x\right) - k_2\cos\left(\omega t - k_1 x\right)\sin\left(\omega t - k_1 x\right)\right] e^{2k_2 x}\vec{e}_x}$ dont la valeur moyenne temporelle, montre une (dé)croissance de la puissance rayonnée au fur et à mesure de la propagation, $\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{E_0^2 k_1}{2\mu_0 \omega} e^{2k_2 x} \vec{e}_x}$; au vu des définitions rappelée ci-dessus, on a aussi $\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c^2}{2 v_\varphi} e^{2k_2 x} \vec{e}_x}$.

III.B.6 <u>**a.**</u> La conservation du terme de phase sur la surface $x = 0$ impose la conservation de la $\boxed{\text{pulsation}}$; cette onde se propage dans le milieu (A) en sens inverse de l'onde incidente, d'où le terme de phase en $\omega t + \underline{k}_A x$. De plus, le champ incident est tangentiel à cette surface et la conservation du champ électrique tangentiel explique que les ondes réfléchie et transmise aient même $\boxed{\text{polarisation}}$ que l'onde incidente.

<u>**b.**</u> Au vu de l'expression du vecteur de Poynting donnée ci-dessus, sa valeur pour l'onde incidente au point O est $\vec{\Pi}_i(x=0) = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 \omega} \left[k_{A1} \cos^2(\omega t) - k_{A2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right] \vec{e}_x$ dont la norme $\|\vec{\Pi}_i(x=0)\| = \frac{E_{0i}^2}{\mu_0 \omega} \left| k_{A1} \cos^2(\omega t) - k_{A2} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right|$ a pour valeur moyenne $\left\langle \|\vec{\Pi}_i(x=0)\| \right\rangle = \frac{E_{0i}^2}{2\mu_0 \omega} k_{A1}$; de même, $\left\langle \|\vec{\Pi}_r(x=0)\| \right\rangle = \frac{|E_{0r}|^2}{2\mu_0 \omega} k_{A1}$ et $\left\langle \|\vec{\Pi}_t(x=0)\| \right\rangle = \frac{|E_{0t}|^2}{2\mu_0 \omega} k_{B1}$ donc $\boxed{R = \frac{|E_{0r}|^2}{E_{0i}^2}}$ et $\boxed{T = \frac{|E_{0t}|^2}{E_{0i}^2} \frac{k_{B1}}{k_{A1}}}$.

<u>**c.**</u> En l'absence de tout phénomène dissipatif sur la surface $x = 0$, on a nécessairement $\boxed{R + T = 1}$.

<u>**d.**</u> Si le vecteur d'onde $\underline{k}_B$ est imaginaire pur, le milieu (B) ne transmet qu'une onde évanescente, qui ne se propage pas : il n'y a donc aucune puissance transmise, $\boxed{T = 0 \text{ donc } R = 1}$. On avait vu en **III.B.4** que les champs électrique et magnétique sont, dans ce cas, déphasés de $\pi/2$; le vecteur de Poynting est donc de moyenne nulle. On trouvait bien sûr le même résultat en **III.B.5** : le vecteur de Poynting moyen est nul si $\underline{k}$ est imaginaire pur.

<u>**e.**</u> Il s'agit du phénomène de réflexion en bout de ligne de l'onde électrique se propageant dans un câble.

III.C Ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

III.C.1 La force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ se réduit à sa partie électrique car $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leqslant \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\|$, avec par ailleurs, du fait de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ou $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$; le champ électrique étant transverse (dans un milieu neutre $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$) on en déduit $\|\vec{B}\| = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} \|\vec{E}\|$ donc aussi $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leqslant \|\vec{E}\| \frac{\|\vec{v}\|}{\omega / \|\vec{k}\|}$ ce qui permet enfin d'affirmer $\boxed{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|}$.

III.C.2 Puisque l'amplitude du mouvement des électrons reste faible devant λ, le coefficient x dans $\exp \imath (\omega t - \underline{k} x)$ varie au plus de Δx avec $|\underline{k} \Delta x| \ll 2\pi$ et on peut donc considérer cette exponentielle comme un terme proportionnel *constant* lors du mouvement électronique (dans le cas contraire, l'équation dynamique projetée en (Ox) fournit $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \propto \exp -\imath \underline{k} x$, qui n'est pas linéaire. Cette hypothèse justifie de rechercher la vitesse de l'électron en notation complexe, avec en particulier pour accélération $\imath \omega \underline{\vec{v}}_e$. *Remarquons que cette hypothèse n'est pas indépendante de la précédente : avec $\underline{k} \sim \omega / c$, elle s'écrit $\omega \Delta x \ll c$ donc $v \ll c$: c'est une nouvelle conséquence de l'approximation non relativiste.* Le principe fondamental de la dynamique, en présence de la seule composante électrique de la force de Lorentz, impose donc $\imath m_e \underline{\vec{v}}_e = -e \underline{\vec{E}}$ et $\boxed{\underline{\vec{v}}_e = -\frac{e}{\imath m_e \omega} \underline{\vec{E}}}$. On a évidemment de même $\boxed{\underline{\vec{v}}_i = +\frac{e}{\imath m_C \omega} \underline{\vec{E}}}$ avec $m_C \gg m_e$, ce qui justifie de négliger la contribution des cations au courant électrique $\vec{j} = n_1 (e \vec{v}_i - e \vec{e}_e)$ soit, en notation complexe, $\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}}$ avec $\boxed{\underline{\gamma} = \frac{n_1 e^2}{\imath m_e \omega}}$.

III.C.3 On cherche ici la moyenne de $\vec{j} \cdot \vec{E}$, $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right)$ soit, la conductivité étant ici imaginaire pure, $\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = 0}$. En l'absence de perte d'énergie (par effet Joule par exemple), ce milieu conducteur peut éventuellement être transparent.

III.C.4 Les équations aux divergences fournissent, dans un milieu partout localement neutre, $\underline{\vec{E}} \cdot \vec{e}_x = 0$ et $\underline{\vec{B}} \cdot \vec{e}_x = 0$ (l'onde est transverse électromagnétique) ; l'équation de Maxwell-Faraday fournit la relation de structure $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \vec{e}_x}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}$ et enfin l'équation de Maxwell-Ampère fournit $-\imath \underline{k} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \imath \omega \underline{\vec{E}} + \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \right]$ ou, après développement, $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ où on a introduit la pulsation de plasma définie par $\boxed{\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_1 e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$. Dans l'ionosphère, $\boxed{\omega_p = 1,78 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$. La longueur d'onde λ_p associée, dans le vide, à une telle pulsation est $\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2\pi c}{\omega_p}$ donc $\boxed{\lambda_p = 1,06 \cdot 10^2 \text{ m}}$; il s'agit d'une onde du domaine radio.

III.C.5 **a.** Puisque $\underline{k}^2 < 0$ on a $\boxed{\underline{k} = -\dfrac{\imath}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$, traduisant l'atténuation (sans propagation) du champ électromagnétique dans le plasma.

b. On a directement $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \mathrm{e}^{-x/\delta} \vec{e}_y}$ où on a défini une épaisseur caractéristique de l'atténuation de l'onde dans le plasma, $\boxed{\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}$. À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, $\underline{\vec{B}} = \imath \frac{k_2}{\omega} E_0 \exp \imath\left(\omega t - \underline{k} x\right) \vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \mathrm{e}^{-x/\delta} \vec{e}_z}$ où on a posé $\boxed{B_0 = \dfrac{E_0}{c}\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1}}$.

c. Comme attendu, $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ donc $\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}}$: l'onde évanescente ne transporte aucune énergie dans le plasma.

III.C.6

a. On a maintenant $\underline{k}^2 > 0$ donc $\boxed{\underline{k} = \pm \dfrac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$, traduisant la propagation possible, dans les deux sens de l'axe (Ox), d'une onde dispersée dans le plasma.

b. On a directement $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t \mp \dfrac{2\pi x}{\lambda}) \vec{e}_y}$ où on a défini la longueur d'onde associée à la propagation par $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{|\underline{k}|}}$. Le signe $-$ correspond à la propagation dans le sens positif de l'axe (Ox). À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, $\underline{\vec{B}} = \frac{k}{\omega} E_0 \exp \imath\left(\omega t - \underline{k} x\right) \vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B} = B_0 \cos(\omega t \mp \dfrac{2\pi x}{\lambda}) \vec{e}_z}$ où on a posé $\boxed{B_0 = \pm \dfrac{E_0}{c}\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$. L'onde électromagnétique est transverse électrique et magnétique, plane, progressive, monochromatique.

c. On obtient $\vec{\Pi} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2\left(\omega t - \underline{k} x\right) \vec{e}_x$ soit, en moyenne temporelle, $\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \pm \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{e}_x}$.

d. $v_\varphi = \omega / |k_1|$ donc $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$. Le milieu est dispersif puisque cette vitesse de phase dépend de la pulsation.

e. Dérivant $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, il vient $c^2 = \frac{\omega}{k} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v_\varphi v_g$ donc $\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$. Cette grandeur mesure la vitesse de déplacement du maximum d'un paquet d'ondes quasi-monochromatique, donc aussi la vitesse de déplacement de l'énergie dans le plasma.

f. On vérifie immédiatement $\boxed{v_\varphi > c > v_g}$; on sait que cette circonstance n'a pas d'importance physique pour v_φ, qui ne mesure la vitesse d'aucun objet matériel.

III.C.7 La fréquence retenue vérifie $\boxed{\omega \gg \omega_p}$; elle permet donc la transmission jusqu'au sol (et retour) des signaux émis par le satellite sans absorption ni dispersion, avec $\boxed{v_\varphi \simeq v_g \simeq c}$.