1 Étude énergétique de l'effet de peau

Un métal occupant le demi-espace $z > 0$ est caractérisé par une permittivité ε_0, une perméabilité μ_0 et une conductivité électrique γ. On se place dans le domaine de fréquences où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

On étudie une situation pour laquelle il existe dans le métal un champ électrique de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = E_m\,\overrightarrow{e_x}\,\exp(-\alpha z)\exp[i(\alpha z - \omega t)]$$

où E_m est une amplitude réelle positive et où $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$

1) Préciser les expressions du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en tout point du métal.

2) a) Quelle est l'expression de la puissance électromagnétique moyenne P_0 transmise en $z = 0$ à travers une surface ΔS perpendiculaire à Oz ?

b) Quelle est l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le volume limité par un cylindre d'axe Oz, de surface de base ΔS et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini ? Comparer ces deux puissances.

3) On peut retrouver la relation établie à la question précédente à l'aide d'un bilan énergétique. À cet effet :

a) Écrire l'identité intégrale de Poynting appliquée au volume V du cylindre d'axe Oz, de surface de base ΔS et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini.

b) Si U_{em} est l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume V, montrer que :

$$\langle\frac{\mathrm{d}U_{\text{em}}}{\mathrm{d}t}\rangle_T = 0$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période temporelle des grandeurs électromagnétiques de ce problème.

c) Retrouver alors la relation entre P_0 et P_J établie à la question 2.b)

2 Énergie cédée aux porteurs de charges dans un plasma

Nous avons vu que dans un plasma, la densité volumique de courant et le champ électrique étaient reliés (dans le domaine complexe) par une équation de type loi d'ohm locale : $\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\overrightarrow{E}}$ avec une conductivité imaginaire pure $\underline{\gamma} = i\gamma_0$. En prenant un champ électrique de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_m\,\overrightarrow{e_y}\,\exp[i(kx - \omega t)], \quad k \in \mathbb{R}$$

avec E_m réel positif, calculer la puissance moyenne fournie par le champ aux porteurs de charge. Conclure.

3 Transparence ultraviolette des métaux

Un métal est traversé par une onde électromagnétique de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_m}}\exp[\,i\,(\underline{\overrightarrow{k}}.\overrightarrow{r} - \omega t)\,]$$

On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau des cations sur les électrons de conduction est de la forme $\overrightarrow{f} = -\,m\frac{\overrightarrow{v}}{\tau}$. On note n_e la densité volumique d'électrons de conduction. On néglige la force exercée par le champ magnétique de l'onde et on suppose les ions fixes dans le référentiel d'étude.

1) Montrer que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i\tau\omega}$$

et donner l'expression de γ_0 en fonction de τ, e (charge élémentaire), n_e et m (masse d'un électron).

2) On rappelle que le métal est électriquement neutre ($\rho = 0$). On suppose que le vecteur d'onde s'écrit $\overrightarrow{\underline{k}} = \underline{k}\,\overrightarrow{u}$. En déduire la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\,\mu_0\underline{\gamma}\omega$$

3) Comment se simplifie-t-elle pour $\tau\omega \gg 1$? Interpréter alors le fait que certains métaux sont transparents dans l'ultra-violet sachant que $n_e = 10^{28}$ m^{-3}, $m = 9.10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et $\tau = 10^{-14}$ s.

4) Expliquer pourquoi les métaux bons conducteurs sont aussi des miroirs.

4 Coefficients de réflexion et de transmission énergétique

Un plasma occupe le demi-espace $x > 0$. On rappelle qu'une OPPS EM de vecteur d'onde $\overrightarrow{\underline{k}} = \underline{k}\,\overrightarrow{e_x}$ peut se propager dans ce milieu à condition que la composante $\underline{k}$, éventuellement complexe, soit reliée à la pulsation ω par la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

ω_p étant la pulsation plasma.

Le demi-espace $x < 0$ est le vide (ou l'air). Une OPPS EM polarisée rectilignement, appelée onde incidente (OI), se propage dans cet espace en direction du plasma. L'interface $x = 0$ donne naissance à une onde réflechie (OR) et à une onde transmise (OT). Les champs électriques associés à ces ondes sont respectivement :

$$\overrightarrow{\underline{E}_I} = E_m\,\overrightarrow{e_y}\,\exp[\,i(k_I x - \omega t)\,]$$
$$\overrightarrow{\underline{E}_R} = \underline{r}\,E_m\,\overrightarrow{e_y}\,\exp[\,i(-k_R x - \omega t)\,]$$
$$\overrightarrow{\underline{E}_T} = \underline{t}\,E_m\,\overrightarrow{e_y}\,\exp[\,i(\underline{k}x - \omega t)\,]$$

où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

1) Donner les expressions de k_I et de k_R en fonction de ω et déterminer les champs magnétiques $\overrightarrow{\underline{B}_I}$, $\overrightarrow{\underline{B}_R}$ et $\overrightarrow{\underline{B}_T}$ associés aux trois ondes.

Il n'y a aucune densité surfacique de charge ($\sigma = 0$) *ni de courants surfaciques* ($\overrightarrow{j_S} = \overrightarrow{0}$) *sur le plan* $x = 0$.

2) Écrire les relations de passage du champ électromagnétique en $x = 0$. En déduire deux équations reliant $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

3) En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de c, ω et $\underline{k}$.

4) a) Déterminer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting en $x = 0$: $\langle\overrightarrow{\pi_I}(x = 0)\rangle$, $\langle\overrightarrow{\pi_R}(x = 0)\rangle$ et $\langle\overrightarrow{\pi_T}(x = 0)\rangle$. On donnera les expressions en fonction de $|\underline{r}|^2$, $|\underline{t}|^2$ et de $k' = \mathrm{Re}(\underline{k})$.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en énergie par :

$$R = \frac{\|\langle\overrightarrow{\pi_R}(x=0)\rangle\|}{\|\langle\overrightarrow{\pi_I}(x=0)\rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle\overrightarrow{\pi_T}(x=0)\rangle\|}{\|\langle\overrightarrow{\pi_I}(x=0)\rangle\|}$$

b) Calculer R et T dans les deux cas : $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$. Conclure.

c) Que peut-on dire de $R + T$ dans les deux cas ?