

DS n°7 (CCP - e3a)
Samedi 25 février 2017 - Durée 4h

Formulaire pour toute l'épreuve :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

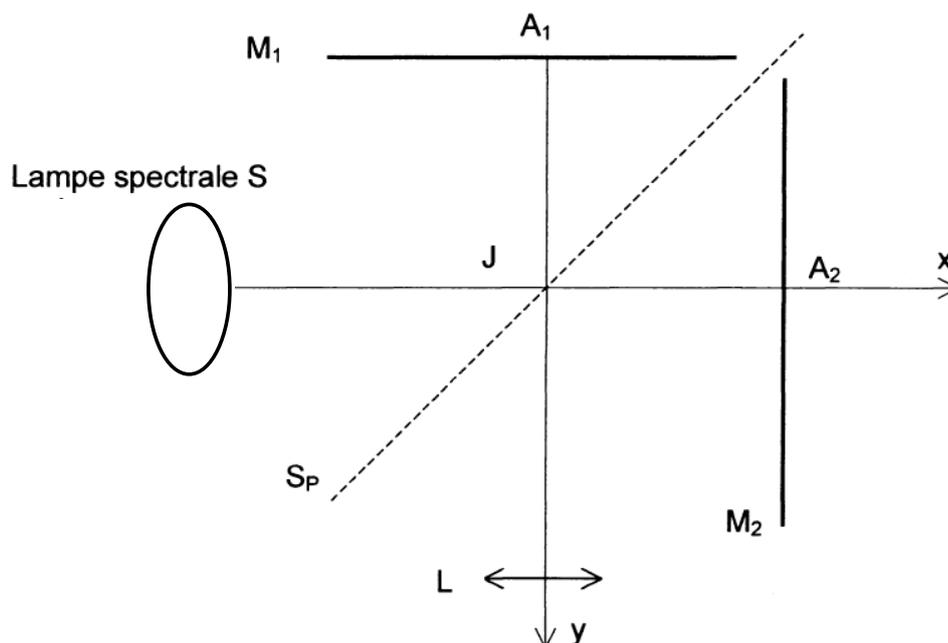
$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

1 Interféromètre de Michelson

I. Généralités sur les interféromètres

1. Préciser pour quel type de source et d'interféromètre il peut y avoir localisation des franges en lumière monochromatique.
2. Donner un exemple de dispositif à division du front d'onde. Donner un exemple de dispositif à division d'amplitude.
3. Qu'appelle-t-on longueur de cohérence ? Quel est son rôle dans les conditions d'observation des franges d'interférences ?
4. Comment peut-on sélectionner une raie quasi-monochromatique de la lumière émise ?

Un interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi-réfléchissante, non-absorbante, appelée séparatrice S_p dont les facteurs de transmission et de réflexion sont supposés égaux, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 . La lame S_p est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . L'interféromètre est plongé dans l'air. Dans tout le problème, on ne tiendra compte ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (inconvénients supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phase par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.



On utilise comme source étendue S une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe Jx .

II. Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air

Ici, M_1 et M_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre.

5. L'interféromètre a été réglé de sorte que les deux bras de l'interféromètre aient des longueurs égales ($JA_1 = JA_2$). L'observation se fait en lumière monochromatique, dans le plan focal image d'une lentille mince convergente L d'axe optique (Jy) et de distance focale image $f' = 1$ m. Qu'observe-t-on ?
6. On translate M_2 normalement à son plan de $e = 1,1$ mm dans la direction des x positifs. On considère un rayon incident (issu d'un point source quelconque de la source étendue), avec un angle d'incidence i . Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles. Faire un tracé des deux rayons lumineux émergents de l'interféromètre associés à ce rayon incident. En quel point P de l'écran vont-ils interférer après passage dans la lentille ?
7. Exprimer la différence de marche en ce point en fonction de l'inclinaison i des rayons émergents de l'interféromètre par rapport à l'axe (A_1, y). En déduire l'intensité lumineuse (ou éclaircissement) sur l'écran ainsi que l'ordre d'interférence p au point P associé à l'angle d'incidence i . En quel point de l'écran cet ordre p est-il maximal ?

Dans toute la suite, on se contentera d'une analyse limitée à l'ordre 2 inclus en i (angle d'incidence) car on suppose $i \ll 1$.

8. Quel est le lieu de localisation des franges d'interférences Lorsque la source S est étendue ?
9. Avec une raie de longueur d'onde $\lambda_0 = 546,1$ nm dans le vide et toujours avec $e = 1,1$ mm, déterminer la valeur de l'ordre d'interférence du premier anneau brillant, puis son rayon. Déterminer de même les rayons des deuxième et troisième anneaux brillants. Que constate-t-on ?
10. On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 une lame transparente à faces parallèles d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Calculer la variation, due à l'introduction de cette lame, de l'ordre d'interférence **au centre**.

Dans toute la suite, on enlève cette lame à faces parallèles.

III. Interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air

11. À partir d'une situation où les deux bras sont égaux $JA_1 = JA_2$, on fait tourner le miroir M_2 d'un angle α très faible autour d'un axe passant par A_2 et perpendiculaire au plan passant par J, A_1 et A_2 .

Montrer à l'aide d'un schéma que le dispositif est équivalent à un coin d'air d'angle α . Comment peut-on éclairer le coin d'air en incidence quasi-normale ?

12. Pour observer une image nette et agrandie des interférences sur un écran, on utilise une lentille convergente L' de distance focale 0,2 m (cette lentille remplace la lentille L) et un écran. La lentille est placée à 0,25 m du miroir M_1 , son axe optique correspond à l'axe (Jy) (on rappelle que l'angle α est faible). Préciser la position de l'écran d'observation et calculer le grandissement.
13. Caractériser le système de franges et donner l'expression de l'interfrange i observé sur l'écran.
AN : $i = 3,75$ mm , $\lambda = 546,1$ nm. Donner la valeur de α .

14. On éclaire le coin d'air en lumière blanche : qu'observe-t-on sur l'arête du coin d'air (ou sur son image) ?

Expliquer pourquoi, si l'angle α augmente, la région du coin d'air où l'observation des franges en lumière blanche (teintes de Newton) est observable devient plus étroite.

IV. Application 1 : détermination des longueurs d'onde d'un doublet

L'interféromètre étant utilisé dans les mêmes conditions que dans la partie précédente, on remplace la source primaire par une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ avec $0 < \Delta\lambda \ll \lambda_1$.

On observe alors nettement des franges de même forme que celles obtenues dans la partie précédente.

15. Compte tenu de l'approximation $\Delta\lambda \ll \lambda_1$, montrer que l'intensité lumineuse à la surface des miroirs est donnée par l'expression :

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \delta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{moy}} \delta \right) \right)$$

où $\lambda_{moy} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

16. Ensuite on translate M_2 d'une distance d et on constate que les franges disparaissent une première fois lorsque $d = 0,15$ mm. En déduire $\Delta\lambda$ et λ_2 .

V. Application 2 : détermination de la largeur spectrale d'une raie

L'interféromètre, toujours utilisé dans les mêmes conditions que dans la partie III, est éclairé par une lampe à vapeur de Cadmium. La raie principale du Cadmium ($\lambda_0 = 643,8$ nm) n'est pas rigoureusement monochromatique et on cherche à déterminer sa largeur spectrale $\Delta\nu$.

17. Quelle est la couleur de la raie principale du cadmium ?
18. Michelson avait trouvé pour la raie rouge du cadmium une longueur de cohérence $L_c = 30$ cm. Calculer $\Delta\nu$ pour la raie rouge du cadmium et en déduire la durée τ du train d'onde.
19. On se propose de calculer l'intensité lumineuse due à cette raie en supposant qu'elle est composée d'une infinité de vibrations monochromatiques dont les fréquences sont comprises entre $(\nu_0 - \Delta\nu/2)$ et $(\nu_0 + \Delta\nu/2)$, où ν_0 est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde λ_0 , et où $\Delta\nu \ll \nu_0$. On suppose que si on obturait une des deux voies, les vibrations dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$ produiraient dans le plan focal image de la lentille une intensité de la forme : $J_0 d\nu$.

- a) Justifier pourquoi il est possible d'écrire l'intensité sur l'écran sous la forme :

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2J_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right] d\nu$$

- b) Montrer que $I(\delta)$ peut s'écrire sous la forme :

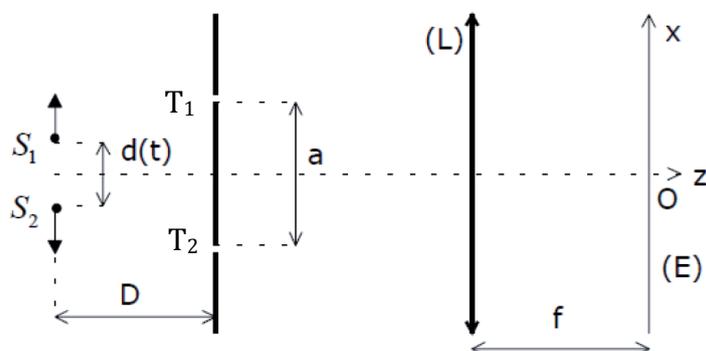
$$I(\delta) = 2J_0\Delta\nu \left[1 + V(\delta) \cos \left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c} \right) \right]$$

et exprimer le facteur de contraste $\mathcal{C} = |V(\delta)|$ ($V(\delta)$ est appelé facteur de visibilité) des franges en fonction de la différence de marche δ , de $\Delta\nu$ et de la vitesse de la lumière dans le vide c . On pourra faire intervenir la fonction sinus cardinal sin_c définie par $\text{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

- c) Pour quelle valeur de δ obtient-on le premier brouillage de la figure d'interférence ?

2 Trous d'Young avec sources en mouvement

On considère le dispositif des trous d'Young avec observation dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (L). Le dispositif des trous est éclairé par deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de même intensité, monochromatiques de même longueur d'onde λ , et qui se déplacent à une vitesse constante v symétriquement par rapport à l'axe Oz , selon l'axe Ox .



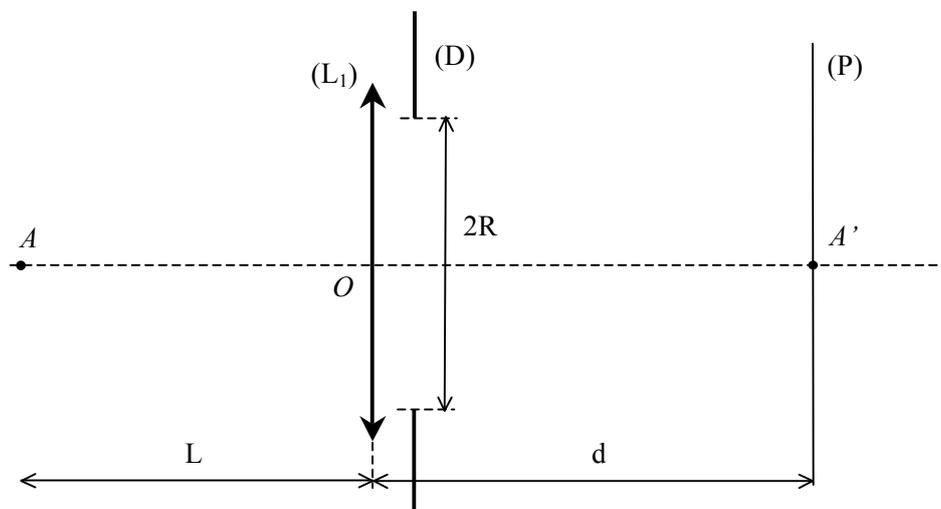
1. On considère la source S_1 seule, supposée à la distance $d/2$ de Oz .
 - a) Dessiner les rayons lumineux qui viennent se superposer en un point $M(x, y, 0)$ du plan focal image de (L).
 - b) Calculer la différence de marche $\delta(M)$ entre ces deux rayons : un raisonnement précis est attendu. On exprimera δ en fonction de x , f' (distance focale image de (L)), a , D et d .
 - c) Dans le cas particulier où $D \gg a$ et $D \gg d$ donner l'expression approchée de $\delta(M)$. On gardera cette approximation pour la suite.
2. On considère à présent les deux sources S_1 et S_2 en mouvement à la vitesse v .
 - a) Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ qui résulte dans le plan focal image de (L), en la mettant sous la forme :

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + V \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right]$$

et en donnant l'expression du facteur $V(t)$ en fonction du temps t .

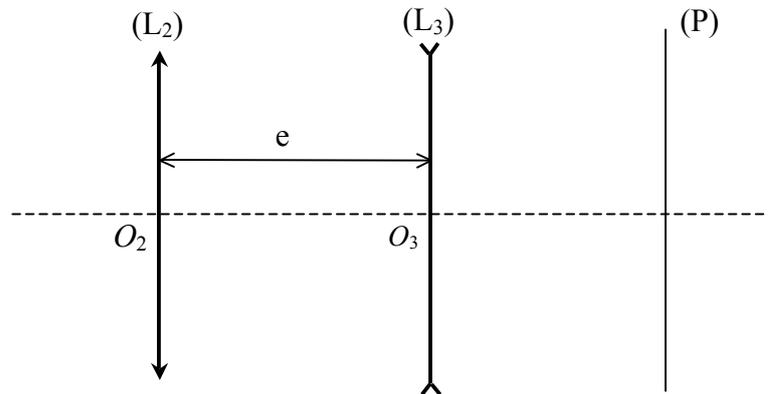
- b) Calculer la périodicité temporelle T du brouillage des franges.
- c) Sachant que la persistance rétinienne est de l'ordre de 1/10 secondes, estimer la vitesse maximum v_{max} des sources pour que le phénomène soit visible.

3 Appareil photographique



On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L_1) de centre O et de distance focale image $f'_1 = 50,0$ mm. La pellicule sensible se trouve dans un plan (P) perpendiculaire à l'axe optique, à une distance d de l'objectif que l'on peut faire varier (mise au point).

1. Entre quelles limites doit varier d pour obtenir sur (P) des images de points A dont la distance $L = AO$ peut varier de 1,20 m à l'infini ?
2. Soit $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-2}$ rad l'angle sous lequel un observateur voit à l'œil nu une tour AB orthogonale à l'axe optique et située à l'infini (α est le diamètre apparent de AB). On photographie cette tour à l'aide de l'appareil précédent. Quelle est la taille de la tour sur la pellicule ?
3. Soit $2R$ le diamètre d'un diaphragme circulaire (D) placé contre (L_1). On règle l'appareil sur l'infini, (P) étant alors dans le plan focal image de (L_1). L'image d'un point A situé à une distance finie de (L_1) ne se trouve alors pas sur (P), mais en un point A_1 situé au delà du plan (P). On observe sur (P) une tâche lumineuse qui est l'intersection de (P) avec le faisceau conique de sommet A_1 et limité par (D).
 - a) Calculer le diamètre de cette tâche en fonction de $2R$, f'_1 et L .
 - b) On admet que cette tâche est une bonne image de A si son diamètre est plus petit que $g = 10^{-2}$ mm. Établir, en vous appuyant sur une figure, la distance minimale L_{min} pour que l'image de A soit bonne lorsque l'appareil est réglé sur l'infini.
 - c) On appelle "ouverture" le rapport $\sigma = f'/2R$. Déterminer la valeur numérique de L_{min} pour une ouverture $\sigma = 2,8$ puis une ouverture $\sigma = 22$.
 - d) Que peut-on appeler "profondeur de champ" ? De quoi dépend-t-elle ? À votre avis, que représente g ?
4. On remplace la lentille (L_1) par un téléobjectif constitué d'une lentille convergente (L_2) de distance focale image $f'_2 = 50$ mm suivie d'une lentille divergente (L_3) de distance focale image $f'_3 = -25$ mm. La distance entre les deux lentilles est $e = 31,2$ mm.



- Où faut-il placer (P) pour photographier un objet situé à l'infini ? Quelle est alors la longueur totale L_E de l'appareil (encombrement) ?
- Quelle est la taille de l'image de la tour évoquée à la question 2. ?
- Dessiner soigneusement la marche d'un faisceau incident de rayons parallèles, faisant un angle α (quelconque mais fixé) avec l'axe optique : échelle en abscisse 1 cm réel donne 0,5 cm sur le dessin.
- Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente unique qui donnerait de la tour la même taille d'image que le téléobjectif ? Comparer son encombrement à celui de la question a).