

Correction du DS n°7 (CCP - e3a)

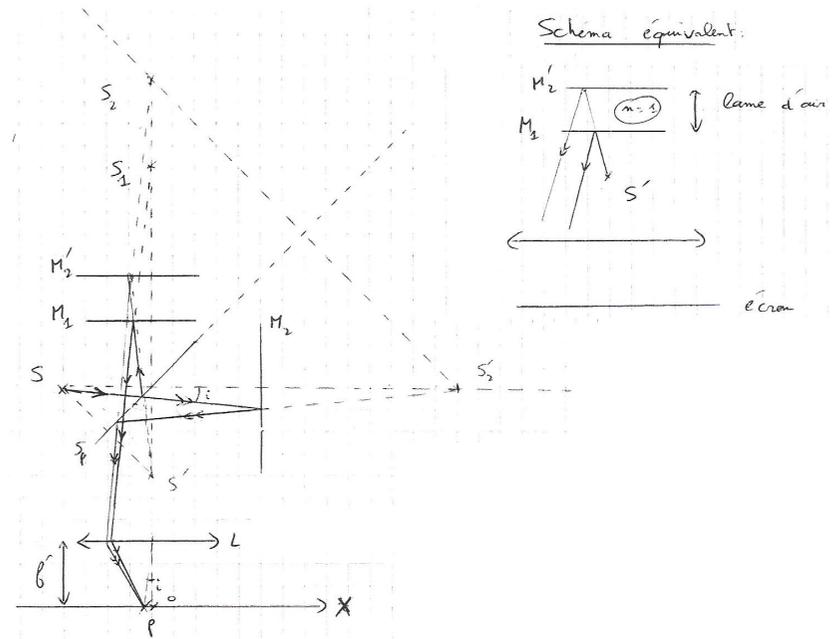
1 Interféromètre de Michelson - (d'après Banque-PT-2005)

I. Généralités sur les interféromètres

1. Les interférences sont non-localisées lorsqu'on utilise une source ponctuelle et/ou un interféromètre à division du front d'onde. Elles sont localisées lorsqu'on utilise une *source étendue* et un *interféromètre à division d'amplitude*.
2. Exemples de dispositif à division du front d'onde : trous d'Young, miroir de Lloyd...
Exemple de dispositif à division d'amplitude : interféromètre de Michelson ...
3. La longueur de cohérence correspond à la longueur des trains d'onde émis par la source (longueur sur laquelle la phase à l'origine ne varie pas). On observe des interférences à condition que la différence de marche séparant deux rayons qui interfèrent soit inférieure à la longueur de cohérence.
4. On peut interposer un filtre coloré correspondant à la raie souhaitée (ou mieux, un filtre interférentiel).

II. Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air

5. L'interféromètre est réglé au contact optique (les chemins optiques parcourus dans les deux bras sont identiques) : la différence de marche est nulle en tout point de l'écran, les interférences sont constructives partout. On observe donc un éclaircissement uniforme appelé "*teinte plate*".
6. Les rayons émergents issus d'un même rayon incident sont parallèles entre eux.



Ils convergent au point P du plan focal image de la lentille, de position $X = f' \tan i \simeq f' i$.

Les rayons qui interfèrent en P ont une différence de marche $\delta = 2e \cos i$ (cf cours, $n_{air} = 1$ ici).

L'intensité lumineuse ou éclaircissement s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 I(P) &= 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) \\
 &= 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e \cos i}{\lambda} \right) \right)
 \end{aligned}$$

L'ordre d'interférence au point P est $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2n_{air}e \cos i}{\lambda_0}$:

$$p = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

Cet ordre d'interférence est maximal pour $i = 0$ donc au centre de la figure d'interférences.

7. Les franges d'interférences sont localisées sur la surface constituée de l'intersection des rayons issus d'un même rayon incident : dans cette configuration, les interférences sont *localisées à l'infini*.

8. Au centre du système d'anneaux : $p_{max} = \frac{2e}{\lambda} \simeq 4028,6$: le centre est presque sombre (p_{max} est quasiment demi-entier).

Note : ce niveau de précision exigerait en fait de considérer $n_{air} = 1,0003$.

Le premier anneau brillant est obtenu pour $p_1 = 4028$.

De plus, pour de petits angles, $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \simeq \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$ donc :

$$i = \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

Le rayon de l'anneau correspondant à l'ordre p vaut alors :

$$r = f' \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

AN : $r(p_1) \simeq \underline{1,7 \text{ cm}}$; $r(p_2 = 4027) \simeq \underline{2,8 \text{ cm}}$; $r(p_3 = 4026) \simeq \underline{3,6 \text{ cm}}$.

L'écart entre les anneaux diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre.

9. Cette lame augmente le chemin optique sur la voie 1 donc diminue la différence de marche entre les deux voies.

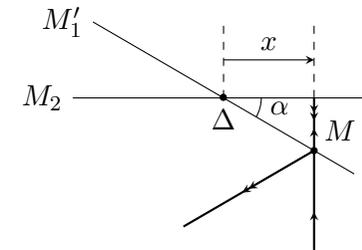
Au centre de la figure d'interférences : $\delta = 2e \cos(0) - 2 \times (n - 1)e' \Rightarrow p_1 = 4010,8$.

La variation de l'ordre d'interférence au centre est donc :

$$\Delta p = -\frac{2(n - 1)e'}{\lambda_0} \simeq -17,8$$

III. Interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air

10. Voir figure ci-dessous. Les deux miroirs M_2 et M'_1 (miroir fictif) forment un coin d'air d'arête Δ .



On place la source au foyer principal objet d'une lentille convergente.

11. Il faut conjuguer l'écran et les miroirs. La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \quad AN : \overline{OA'} = 1 \text{ m} \quad \bar{\gamma} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad AN : \bar{\gamma} = -4$$

12. La différence de marche est $\delta = 2 \times x \tan \alpha \simeq 2\alpha x$. On observe des franges rectilignes ($x = C^{te}$).

$$I(i+x) = I(x) \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha}} \text{ donc } \boxed{i_{ecran} = 2 \frac{\lambda}{\alpha}} \quad AN : \\ \alpha \simeq 2,91 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

13. Sur l'arête du coin d'air, $\delta = 0$ quelle que soit la longueur d'onde. L'image de l'arête du coin d'air correspond à des interférences constructives pour toutes les longueurs d'onde : on obtient une frange blanche.

Comme chaque longueur d'onde fournit son propre système de franges et que ces différents systèmes sont décalés les uns par rapport aux autres et sont incohérents entre eux, on obtient des franges irisées au voisinage de l'arête puis du blanc d'ordre supérieur.

Les interférences sont observables si $-\delta_{\text{lim}} < \delta < \delta_{\text{lim}} \Rightarrow -\frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha} < x < \frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha}$.

Plus α augmente, plus la plage d'observation des interférences est réduite.

IV. Application 1 : détermination des longueurs d'onde d'un doublet

14. Les deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont incohérentes entre elles : leurs systèmes de franges se superposent en intensité. On a donc :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right) \\ = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right)$$

soit

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \delta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{moy}}} \delta \right) \right)$$

$$\text{où } \lambda_{\text{moy}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Il apparaît un terme de visibilité $V = \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \delta \right)$; le contraste est $\mathcal{C} = |V|$. Il peut s'annuler pour certaines valeurs de d car $\delta = 2\alpha x + 2d$.

15. Quand $d = 0$, les franges sont bien contrastées donc $\mathcal{C} = 1$ et $\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \times 2\alpha x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Quand $d = 0,15$ mm, le contraste est nul donc :

$$\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \times 2(\alpha x + d) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} = \frac{1}{4d}$ donc :

$$\boxed{\lambda_2 = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{4d} \right)^{-1} = \frac{\lambda_1 4d}{4d - \lambda_1}}$$

AN : $\lambda_2 \simeq 589,6$ nm et $\Delta\lambda \simeq 0,6$ nm.

IV. Application 2 : détermination de la largeur spectrale d'une raie

16. La longueur d'onde $\lambda_0 = 643,8$ nm correspond à une raie rouge.

17. La mesure de L_c permet de déduire $\Delta\nu = \frac{c}{L_c} = 10^9$ Hz = 1 GHz,

qui correspond à $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta\nu}{c} = 1,38 \cdot 10^{-12}$ m = 0,0014 nm, ce qui est cohérent en comparaison avec l'écart du doublet du sodium obtenu précédemment, qui valait 0,6 nm.

La durée du train d'onde vaut donc $\tau = \frac{1}{\Delta\nu} = 10^{-9}$ s = 1 ns. On obtient évidemment un temps de cohérence très court.

18. (a) Les radiations émises dans la raie du cadmium sont incohérentes entre elles puisqu'elles sont non synchrones, et il faut donc sommer les intensités élémentaires dI_ν produites sur l'écran par chaque radiation de largeur $d\nu \ll \Delta\nu$ centrée sur la fréquence $\nu \in [\nu_0 - \Delta\nu/2; \nu_0 + \Delta\nu/2]$:

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} dI_\nu$$

De plus, la raie est supposée avoir un profil rectangulaire de sorte qu'on peut définir une densité spectrale J_0 constante au niveau de la source telle que $dI_{0,\nu} = J_0 d\nu$. Finalement, chaque radiation donnant lieu à une interférence à deux ondes cohérentes de même intensité avec l'interféromètre de Michelson, on peut également écrire :

$$dI_\nu = 2J_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

et donc

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2J_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

- (b) $I(\delta) = 2J_0 \left[\Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \left[\sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right]_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \right]$. En utilisant la formule de trigonométrie, on obtient :

$$I(\delta) = 2J_0 \Delta\nu \left[1 + \text{sin}_c\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right) \cos(2\pi\nu_0\delta) \right]$$

où sin_c est la fonction sinus cardinal définie par : $\text{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. C'est cette partie de l'intensité qui a une variation

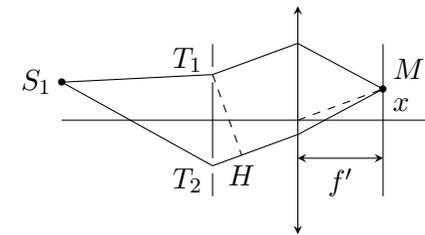
plus lente avec δ et qui sert d'enveloppe car $\Delta\nu \ll \nu_0$. C'est donc la fonction de visibilité, et on peut en déduire :

$$\mathcal{C} = \left| \text{sin}_c\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right) \right|$$

- (c) Le contraste s'annule pour la première fois lorsque l'argument du sinus cardinal est égal à π , soit pour $\delta = \frac{c}{\Delta\nu} = L_c$. On retrouve bien le résultat obtenu précédemment.

2 Trous d'Young avec sources en mouvement

1. a) Voir la figure ci-dessous :



- b) Après les deux trous, on utilise le théorème de Malus et le principe du retour inverse de la lumière pour montrer que $(T_1M) = (HM)$. On aura donc :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= ST_2 - ST_1 + T_2H \\ &= \sqrt{D^2 + \frac{(d+a)^2}{4}} - \sqrt{D^2 + \frac{(d-a)^2}{4}} + \frac{ax}{f'} \end{aligned}$$

- c) On peut faire une développement limité :

$$D \sqrt{1 + \frac{(d \pm a)^2}{4D^2}} \approx D + \frac{(d \pm a)^2}{8D}$$

et donc :

$$ST_2 - ST_1 \approx \frac{da}{2D}$$

et donc :

$$\delta(M) \approx \frac{da}{2D} + \frac{ax}{f'}$$

2. On considère à présent les deux sources S_1 et S_2 en mouvement à la vitesse v .

a) Comme les deux sources sont incohérentes, chacune produit sa propre figure d'interférences et les contributions s'ajoutent en intensité. De plus : $d(t)/2 = vt$, ce qui donne :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{ax}{f'} + \frac{avt}{D} \right\} \right) \right] \\ + 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{ax}{f'} - \frac{avt}{D} \right\} \right) \right]$$

c'est à dire :

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{avt}{D} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right]$$

et

$$V(t) = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{avt}{D} \right)$$

b) Les franges se brouillent à chaque fois de $V(t) = 0$, ce qui se produit pour :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{avt}{D} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

et donc :

$$t = n \frac{\lambda D}{av} \implies T = \frac{\lambda D}{av}$$

c) Il faut que $T \geq 1/10$, ce qui implique :

$$v \leq \frac{10\lambda D}{a} = v_{max}$$

Donnons un ordre de grandeur : $D = 1$ m, $a = 0,5$ mm et $\lambda = 500$ nm, ce qui donne : $v_{max} = 1$ cm/s.

3 APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

1) On utilise la relation de conjugaison de Descartes en posant $L = \overline{AO} > 0$:

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f_1} \iff \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{L}$$

d'où :

$$\overline{OA'} = \frac{f_1 L}{L - f_1}$$

En considérant que $\overline{OA'}$ est une fonction de L , on peut étudier ses variations en calculant sa dérivée :

$$\frac{d\overline{OA'}}{dL} = \frac{f_1(L - f_1) - f_1 L}{(L - f_1)^2} = \frac{-f_1^2}{(L - f_1)^2} < 0$$

Ainsi, $\overline{OA'} = d$ est une fonction strictement décroissante de L : elle est la plus grande lorsque $L = 1,20$ m et elle est la plus petite lorsque $L \rightarrow +\infty$, ce qui correspond à $d = f_1$ (dans ce cas l'image A' est au foyer image F' de la lentille mince). On aura donc¹ :

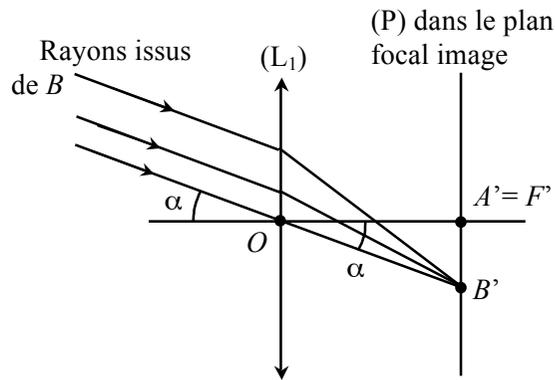
$$d_{\min} = f_1 = 50,0 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_{\max} = \frac{50 \times 1200}{1200 - 50} = 52,2 \text{ mm}$$

et donc :

$$d \in [50,0 \text{ mm} ; 52,2 \text{ mm}]$$

1. Les résultats sont donnés avec 3 chiffres significatifs, conformément à la précision des données de l'énoncé.

2) Remarque : dire que l'objet AB est à l'infini signifie seulement que $L \gg f_1$. Dans ce cas, les rayons lumineux issus de B sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique : après traversée de la lentille, ils convergent vers un point B' situé à l'intersection du plan focal image et du rayon passant par O (ceux issus de A étant parallèles à l'axe optique, ils convergent vers F').



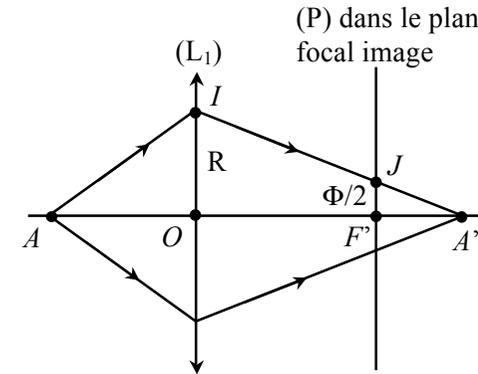
Dans le triangle $OA'B'$:

$$\tan \alpha = \frac{A'B'}{f_1} \approx \alpha$$

d'où :

$$A'B' = f_1 \alpha = 1,25 \text{ mm}$$

3) a)



Les deux triangles $A'OI$ et $A'F'J$ sont semblables. On peut donc utiliser le théorème de Thalès pour trouver :

$$\frac{\Phi/2}{F'A'} = \frac{R}{OA'} \text{ d'où } \phi = 2R \frac{F'A'}{OA'} = 2R \frac{OA' - f_1}{OA'}$$

Or, d'après la relation de conjugaison de Descartes (cf. question 1)) :

$$\frac{1}{OA'} = \frac{f_1 L}{L - f_1}$$

ce qui conduit au résultat demandé par l'énoncé après substitution et simplification :

$$\phi = 2R \frac{f_1}{L}$$

3) b) On veut :

$$\phi < g \text{ d'où } L > 2R \frac{f_1}{g} = L_{\min}$$

3) c) On peut éliminer $2R = f_1/\sigma$, ce qui donne :

$$L_{\min} = \frac{f_1^2}{\sigma g}$$

A.N. : pour $\sigma = 2,8$ $L_{\min} = 89$ m et pour $\sigma = 22$ $L_{\min} = 11$ m.

3) d) La profondeur de champ est la zone située dans l'intervalle $[L_{\min}, +\infty]$, qui donne une image acceptable sur la pellicule. Plus L_{\min} est petite, plus la profondeur de champ est importante. On voit donc que plus l'ouverture σ est grande, plus le rayon R du diaphragme est petit et meilleure est la profondeur de champ.

g représente la taille du "grain" (dans un appareil photo avec une pellicule réalisée à partir d'une émulsion) ou encore la taille de la cellule élémentaire photosensible dans le cas d'un appareil numérique. Deux images ponctuelles B et B' formées sur le même "grain" ne seront pas séparées et seront traitées comme un seul point.

4) a) Le schéma de fonctionnement de l'appareil est donné ci-dessous :

$$A_{\infty} \xrightarrow{(L_2)} F'_2 \xrightarrow{(L_3)} A'$$

Un point A_{∞} situé à l'infini sur l'axe optique a pour image par (L_2) le foyer image F'_2 . Ce point sert d'objet pour (L_3) qui en donne une image A' (où sera placée la pellicule). On écrit la relation de conjugaison de Descartes pour (L_3) :

$$-\frac{1}{O_3F'_2} + \frac{1}{O_3A'} = \frac{1}{f_3} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_3A'} = \frac{f_3 \overline{O_3F'_2}}{\overline{O_3F'_2} + f_3}$$

et comme : $\overline{O_3F'_2} = \overline{O_3O_2} + \overline{O_2F'_2} = f_2 - e$, on obtient² :

$$\overline{O_3A'} = \frac{f_3 (f_2 - e)}{f_2 + f_3 - e} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 76 \text{ mm}$$

2. Les valeurs numériques sont données avec 2 chiffres significatifs, compte-tenu des données les moins précises de l'énoncé.

La longueur totale de l'appareil est alors :

$$L_E = \overline{O_2A'} = \overline{O_2O_3} + \overline{O_3A'} = e + \overline{O_3A'} = 107 \text{ mm}$$

4) b) La lentille (L_2) donne de l'objet $A_{\infty}B_{\infty}$ une image A_1B_1 située dans son plan focal image ($A_1 = F'_2$) et dont la taille se calcule de la même manière qu'à la question 2) :

$$A_1B_1 = f_2 \alpha$$

La lentille (L_3) donne de $A_1B_1 = F'_2B_1$ une image réelle $A'B'$ dont la taille peut être calculée en utilisant le grandissement :

$$A'B' = |\gamma_3| A_1B_1 = \left| \frac{\overline{O_3A'}}{\overline{O_3F'_2}} \right| f_2 \alpha = \frac{f_2 f_3 \alpha}{f_2 + f_3 - e}$$

A.N. : $A'B' = 5,0$ mm. Cette taille est plus importante que celle trouvée à la question 2, avec une seule lentille de focale $f = 50$ mm. L'objet est plus grand sur la pellicule : il semble donc plus proche.

4) c) Voir schéma en fin de sujet. La difficulté est de construire l'image de B_1 , objet virtuel pour (L_3) . Pour cela, on peut utiliser deux rayons particuliers : le rayon O_3B_1 passant par le centre optique O_3 de (L_3) non dévié et le rayon incident sur (L_3) parallèle à l'axe optique dont le prolongement passe par B_1 (il arrive en I sur la lentille) : il émerge avec un prolongement passant par F'_3 , foyer image de (L_3) . Les deux rayons émergents se coupent en B' , ce qui permet ensuite de construire A' .

Remarque : l'échelle prise est : 1 cm réel = 1 cm dessin, plus pratique. Nous remarquons que l'on retrouve bien $\overline{O_3A'} = 76$ mm, aux erreurs de construction près.

4) d) Avec une lentille unique de distance focale f la taille de l'image sur la pellicule vaut : $A'B' = f \alpha$. Si on veut la même taille pour α

donné, il faut choisir :

$$f = \frac{f_2 f_3}{f_2 + f_3 - e} \stackrel{AN}{=} 200 \text{ mm}$$

Cet appareil serait environ deux fois plus encombrant ($L'_E = 200$ mm) que le téléobjectif.