

Correction - DS n°8bis - Centrale - Mines

1 De la cuisson des œufs

A. Chauffage de l'eau

1. Il faut élever la température de l'eau et du cuiseur équivalent à la masse m_c d'eau. Si Δt_1 est la durée pendant laquelle on maintient une puissance constante \mathcal{P} et que l'on passe de T_0 à T_{eb} , alors on a $\mathcal{P}\Delta t_1 = (m_c + m_0)c(T_{eb} - T_0)$. Cette équation suppose aussi que toute la puissance est transmise à l'eau. On a donc

$$\Delta t_1 = \frac{(m_c + m_0)c(T_{eb} - T_0)}{\mathcal{P}}.$$

2. La durée mesurée correspond à Δt_1 . On a donc : $m_c = \frac{\mathcal{P}\Delta t_1}{c(T_{eb} - T_0)} - m_0$. On trouve : $m_c = 32 \text{ g}$.

B. Détermination de la durée de cuisson Δt_2

Mécanisme de la cuisson des œufs

3. L'élévation de la température est assez rapide, n'importe quel solide subira des contraintes assez fortes liées au phénomène de dilatation. Cela amène des tensions dans le solide. Pour éviter des craquements qui vont zébrer la coquille de l'œuf dans tous les sens, il est préférable de soulager les contraintes en brisant un peu mais pas trop... la coquille avec la pointe proposée. Toutefois, le problème doit être assez compliqué car la dilatation thermique joue mais en même temps, la coquille doit laisser passer par ses pores de la valeur d'eau et on peut imaginer que le départ d'eau aurait tendance à faire diminuer le volume de l'intérieur de l'œuf. Bref, ce problème de la rupture de la coquille est sans doute très compliqué et difficilement synthétisable en quelques lignes.

Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

4. La couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr reçoit par conduction la puissance $j_{cond}(r, t)4\pi r^2$ par conduction entrante. La puissance sortante - toujours par conduction - est $j_{cond}(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2$. Le bilan de puissance correspond à l'élévation de la température au cours du temps de ce système infinitésimal. On peut donc écrire que $j_{cond}(r, t)4\pi r^2 - j_{cond}(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 = \mu c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t}$. On voit apparaître l'équation de conservation locale de l'énergie $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{cond}(r, t))}{\partial r} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. La loi de la conduction thermique de FOURIER permet d'écrire que $\vec{j}_{cond}(r, t) = -\lambda \text{grad} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$. On arrive à l'équation de diffusion thermique en coordonnées sphériques avec symétrie sphérique - c'est-à-dire invariance en θ et en φ - que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

5. Il faut effectuer le changement de variable proposé. On a $r^2 = \rho^2 r_2^2$ et $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{1}{r_2}$. En exploitant ce type de relation, on arrive dans un premier temps à $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = \frac{r_2^2 \mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$. On utilise le fait que $\frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$.

Avec $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\theta}$. On en déduit que $\theta = r_2^2 \frac{\mu c}{\lambda}$ pour obtenir l'équation de diffusion thermique adimensionnée $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau}$. On constate que la durée caractéristique augmente comme le carré de la taille caractéristique, c'est ce qui est attendu dans un phénomène de diffusion.

Résolution de l'équation de la chaleur

6. On effectue une recherche de solution à variables séparées. On a $\frac{\partial T}{\partial \tau} = f(\rho) \frac{dg}{d\tau}$ et $\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{df}{d\rho} g(\tau)$. En utilisant les calculs précédents et en séparant les variables, on obtient l'équation suivante $\frac{1}{\rho^2 f(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{1}{g(\tau)} \frac{dg}{d\tau}$. Cette équation est vraie $\forall \rho$ et $\forall \tau$ qui sont des variables indépendantes. Chaque membre de l'égalité précédente doit être égale à la même constante. L'énoncé propose de poser cette constante $-A^2$ où A est un réel. Cela signifie que la constante est réelle et négative. L'équation différentielle pour $g(\tau)$ est donc $\frac{dg}{d\tau} + A^2 g(\tau) = 0$. Comme il n'est pas physiquement envisageable que la température diverge au cours du temps, il est évident que la constante devait être négative. On a donc une solution plus raisonnable que s'amortit progressivement :

$$g(\tau) = g(0) \exp -A^2 \tau.$$

7. Avec la forme proposée, il faut calculer la dérivée première pour commencer : $\frac{df}{d\rho} = \frac{\frac{dF}{d\rho} \rho - F(\rho)}{\rho^2}$. On a donc $\rho^2 \frac{df}{d\rho} = \frac{dF}{d\rho} \rho - F(\rho)$. On dérive à nouveau cette expression par rapport à ρ . On obtient alors $\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \rho \frac{d^2 F}{d\rho^2}$. On arrive alors facilement à l'équation classique type oscillateur harmonique : $\frac{d^2 F}{d\rho^2} + A^2 F(\rho) = 0$. Les solutions sont donc de la forme $F(\rho) = \alpha \cos A\rho + \beta \sin A\rho$. Cela permet d'arriver à $f(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} \cos A\rho + \frac{\beta}{\rho} \sin A\rho$. Cette

forme de solution pose un problème lorsque $\rho \rightarrow 0$ puisqu'alors $\frac{\alpha}{\rho} \cos A\rho$ diverge alors que le terme $\frac{\beta}{\rho} \sin A\rho$ reste borné puisque le sinus s'annule en $\rho = 0$. Il est indispensable d'avoir $\alpha = 0$. La solution est alors de la forme : $f(\rho) = \frac{\beta}{\rho} \sin A\rho$.

8. La solution générale de l'équation de diffusion thermique proposée est proposée comme la **superposition** de différentes solutions. C'est pourquoi la forme de la solution est $T(\rho, \tau) = T_{eb} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(A_i \rho)}{\rho} \exp -A_i^2 \tau$. Cette superposition est autorisée parce que l'équation de diffusion thermique est linéaire. Pour déterminer A_i et β_i , il faut exploiter les conditions aux limites à savoir $\rho = 1$, on est en $r = r_2$. On remarquera que l'on a déjà pris en compte la condition aux limites en $\rho = 0$ en annulant α à la question précédente. On termine la détermination de la solution avec la condition initiale à savoir la prise en compte du profil de température à la date $\tau = 0$.

Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

9. Il faut écrire la continuité de la puissance surfacique transférée par convection (loi de NEWTON) et la puissance surfacique de conduction (loi de FOURIER) à la surface de l'œuf en $\rho = 1$. Le flux surfacique de conduction est $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{r_2} \frac{\partial T}{\partial \rho} \vec{e}_r$. Il faut calculer $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ et la valider en $\rho = 1$. Puis identifier à la convection. On a $\frac{\partial T}{\partial \rho} = \beta \exp -A^2 \tau \frac{A \cos A\rho - \sin A\rho}{\rho^2}$. On peut donc écrire que $\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \beta \exp -A^2 \tau (A \cos A - \sin A)$. On a donc $\vec{j}_{cond}(1, \tau) = -\frac{\lambda}{r_2} \beta \exp -A^2 \tau (A \cos A - \sin A) \vec{e}_r$ et $\vec{j}_{conv} = h\beta \exp -A^2 \tau \sin A \vec{e}_r$. On obtient alors l'équation $\frac{\lambda}{r_2} (\sin A - A \cos A) = h \sin A$. On peut conclure en établissant l'équation demandée par l'énoncé :

$$\tan A = \frac{A}{1 - \frac{r_2 h}{\lambda}}$$

10. On a $r_2 h = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \lambda_{eau}$. On en déduit que $\frac{r_2 h}{\lambda} = 50$. Cette valeur permet d'écrire que $\tan A = -\frac{A}{49}$. On peut apprécier les solutions de cette équation de manière graphique en traçant $\tan A$ et la droite d'équation $-A/49$ sur le même graphique. On travaille avec $A > 0$ depuis le départ. La figure 1 présente les deux courbes. On peut donc voir que les points d'intersection sont très proches de $A = \pi$, $A = 2\pi$. Plus A grandit, plus on s'éloigne de la possibilité de traiter la solution par approximation. On retient donc comme suggéré par l'énoncé $A \simeq \pi$. L'erreur commise est concrétisée par l'écart entre $\tan \pi = 0$ et $A = \pi$ qui donne $-\pi/49 = -0,06$. Par rapport à $\pi = 3,14$, cela représente une erreur d'environ 2%. Cette erreur est tout à fait acceptable mais, attention, l'erreur augmente linéairement avec le mode retenu dans les solutions pour $A = 2\pi$ ou $A = 3\pi$.

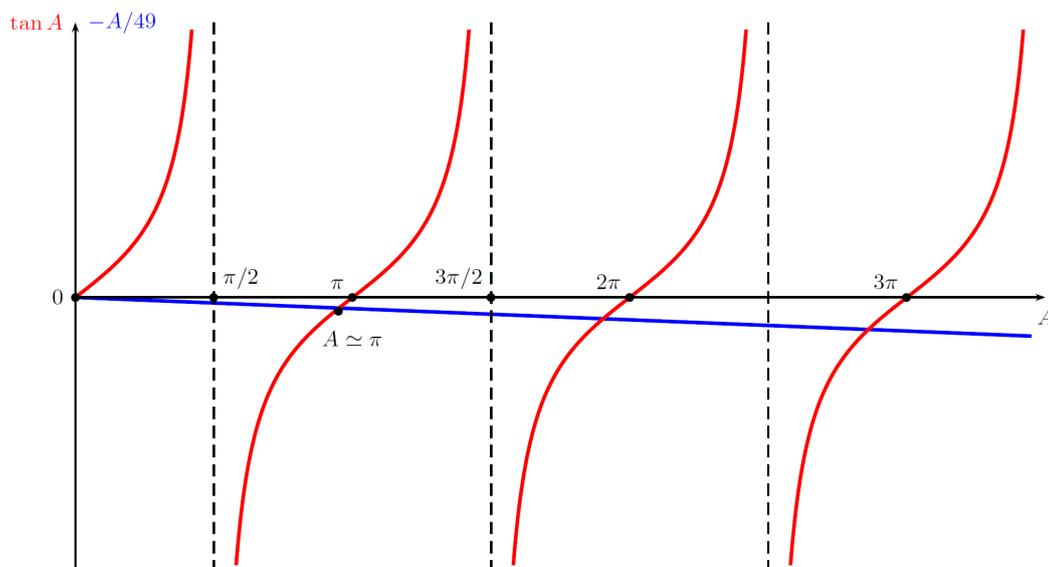


FIGURE 1 – Détermination de A par méthode graphique

11. En ne retenant que la solution la plus lente, on a $T(\rho, \tau) = T_{eb} + \pi \beta \frac{\sin \pi \rho}{\pi \rho} \exp -\pi^2 \tau$. Dans cette expression, on a fait apparaître un sinuscardinal. La surface de l'œuf correspond à un rayon tel que $\rho = 1$. Par conséquent, $\text{sinc } \pi \rho = \text{sinc } \pi = 0$. La température de surface est donc $T(\rho = 1, \tau) = T_{eb} = 100^\circ \text{C}$. Cela revient à considérer

que la convection est très élevée et que $j_{conv} = h(T - T_{eb})$ reste borné avec $T - T_{eb} \rightarrow 0$. Cela signifie que l'on considère en quelque sorte que $h \rightarrow \infty$.

12. À la date $t = 0$, on a $T(\rho, 0) = T_{eb} + \pi\beta \frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho}$. On se place au centre de l'œuf en $\rho = 0$, alors $\text{sinc } \pi\rho = 1$. On a donc $T(0, 0) = T_{eb} + \pi\beta$. La température des œufs était la température ambiante au départ et donc $T(0, 0) = T_0$. On a donc $\beta = \frac{T_0 - T_{eb}}{\pi}$. Cela permet d'écrire la forme finale de la température :

$$T(\rho, \tau) = T_{eb} - (T_{eb} - T_0) \text{sinc } \pi\rho \exp -\pi^2\tau.$$

Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

13. On atteint la température de cuisson T_c au centre de l'œuf, c'est-à-dire en $\rho = 0$. On a donc $T_c - T_{eb} = -(T_{eb} - T_0) \exp -\pi^2 \frac{\Delta t_2}{\theta}$. On obtient alors $\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln \frac{T_{eb} - T_0}{T_{eb} - T_c}$. Avec les valeurs fournies, on trouve $\theta = r_2^2 \frac{\mu c}{\lambda} = 4350 \text{ s}$.

14. On trouve $\Delta t_2 = 612 \text{ s}$. 10 minutes, c'est une très bonne estimation pour la cuisson d'un œuf.

C. Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur \mathcal{E}_d

15. L'œuf possède une masse $m_1 = \mu \frac{4}{3} \pi r_2^3 = 66 \text{ g}$. Cet œuf passe de la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$ à $T_c = 80^\circ\text{C}$. On oublie qu'il existe forcément un gradient de température entre la surface de l'œuf et son centre. C'est le minimum d'énergie pour atteindre l'objectif. On a donc $\mathcal{E}_{d\min} = m_1 c (T_c - T_0)$. On trouve : $\mathcal{E}_{d\min} = 16,4 \text{ kJ}$.

16. On calculera la borne supérieure $\mathcal{E}_{d\max}$ en considérant que le centre de l'œuf atteint la température d'ébullition $T_{eb} = 100^\circ\text{C}$. On a donc $\mathcal{E}_{d\max} = m_1 c (T_{eb} - T_0)$. On trouve : $\mathcal{E}_{d\max} = 21,9 \text{ kJ}$.

17. On a donc $\mathcal{E}_d = \frac{\mathcal{E}_{d\max} + \mathcal{E}_{d\min}}{2}$. On trouve : $\mathcal{E}_d = 19,2 \text{ kJ}$.

18. Pendant la durée dt , la masse d'eau $\mathcal{D}_m dt$ s'évapore. On apporte aussi l'énergie $d\mathcal{E}$ à chacun des n œufs. L'énergie apportée correspond à la puissance apportée moins les fuites ou pertes thermiques. On peut donc écrire que $\mathcal{P} dt - \mathcal{P}_f dt = \mathcal{D}_m dt \ell_v + n d\mathcal{E}$. On a donc : $n \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - \mathcal{D}_m \ell_v$.

19. On intègre la loi précédente pendant la durée de cuisson Δt_2 en n'oubliant pas que la totalité du débit massique de vapeur d'eau correspond à la totalité de la masse d'eau introduite. On a donc $\int_0^{\Delta t_2} \mathcal{D}_m dt = m_0$. On a donc $n \mathcal{E}_d = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - m_0 \ell_v$. On trouve bien la formule demandée : $m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_d}{\ell_v}$. On voit bien dans cette formule que la masse m_0 diminue lorsque le nombre n d'œufs augmente.

20. La puissance thermique (moyenne) minimale que doit fournir la résistance électrique pour pouvoir cuire les œufs durs est : $\mathcal{P}_{\min} = \frac{n \mathcal{E}_d}{\Delta t_2}$. On trouve $\mathcal{P}_{\min} = 222 \text{ W}$. Cette valeur est inférieure à la puissance nominale du cuiseur qui est $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$. On peut donc penser que le cuiseur va pouvoir effectivement cuire tous les œufs prévus à savoir 7. Il ne faut oublier qu'il faut aussi de la puissance pour monter l'eau à température et la vaporiser ensuite.

21. Si l'on s'intéresse aux œufs durs, on peut calculer la pente avec ce qui précède. Cette pente est $-\frac{\mathcal{E}_d}{\ell_v} = -8,4 \text{ g}$. Or la pente proposée est $-5,94 \text{ g}$. Cela signifie que les œufs n'ont pas le rayon $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ mais qu'ils sont plus petits. L'énergie nécessaire pour la cuisson est proportionnelle au cube du rayon. On calcule tout d'abord l'énergie de cuisson $\mathcal{E}'_d = 5,94 \times 10^{-3} \times \ell_v = 13,4 \text{ kJ}$. On a donc $r'_2 = r_2 \left(\frac{\mathcal{E}'_d}{\mathcal{E}_d}\right)^{1/3}$. On trouve : $r'_2 = 2,2 \text{ cm}$. L'ordonnée à l'origine est $m_0 + 126 \text{ g} = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v}$. On considère que la puissance est $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$ et $\mathcal{P}_f \ll \mathcal{P}$. On trouve un temps de cuisson $\Delta t_2 = \frac{m_0 \ell_v}{\mathcal{P}} = 800 \text{ s}$. Cette valeur est encore une fois tout à fait convenable puisque cela représente environ 13 minutes.