MÉCANIQUE QUANTIQUE

En 1892, Lord Kelvin écrivait : "*La physique est définitivement constituée dans ses concepts fondamentaux. Tout ce qu'elle peut désormais apporter, c'est la détermination précise de quelques décimales supplémentaires. Il y a bien deux petits problèmes : celui du résultat négatif de l'expérience de Michelson et celui du corps noir, mais ils seront rapidement résolus et n'altèrent en rien notre confiance ...*".

I Fonction d'onde

1) Le cas de la lumière : onde ou corpuscule ?

Les expériences d'optique peuvent être interprétées par deux théories qui semblent s'exclurent mutuellement :

- La théorie ondulatoire qui assimile la lumière à une onde : cette théorie est très efficace pour décrire les phénomènes d'interférences.
- La théorie corpusculaire qui assimile la lumière à un ensemble de particules appelées *photons*. Cette façon de voir permet d'expliquer les spectres d'émission et d'absorption des atomes.
- De plus, l'énergie d'un photon s'écrit : $E = h\nu$, où ν est la fréquence de l'onde de la théorie ondulatoire. Comment l'énergie d'une particule peut-elle dépendre de la fréquence d'une onde ?

2) Retour sur l'expérience des trous d'Young

- Dans la théorie ondulatoire, la lumière émise par une source (ponctuelle) S est une onde $a(S,t)$. Si on modélise celle-ci par une vibration sinusoïdale de pulsation ω_0 alors on peut l'écrire en complexes sous la forme :

$$\underline{a}(S,t) = A_S\, e^{i\varphi_S}\, e^{-i\omega_0 t}$$

Dans l'expérience des trous d'Young, la lumière reçue en un point M est la somme des deux ondes qui sont passées respectivement par le trou T_1 et par le trou T_2 :

$$\underline{a}_1(M,t) = t_1\, \underline{a}(S, t-\tau_1) = t_1\, e^{i\omega_0\tau_1}\, \underline{a}(S,t)$$

et

$$\underline{a}_2(M,t) = t_2\, \underline{a}(S, t-\tau_2) = t_2\, e^{i\omega_0\tau_2}\, \underline{a}(S,t)$$

où τ_1 et τ_2 sont les temps de propagation de S à M en passant par T_1 et en passant par T_2 respectivement. On a donc (on suppose $t_1 = t_2 = t_0$) :

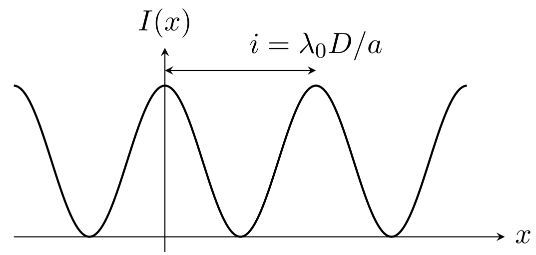
$$\underline{a}(M,t) = \underline{a}_1(M,t) + \underline{a}_2(M,t) = t_0 \left(e^{i\omega_0\tau_1} + e^{i\omega_0\tau_1}\right) \underline{a}(S,t)$$

L'intensité lumineuse détectée en M est alors :

$$I(M) = \frac{|\underline{a}(M,t)|^2}{2} = t_0^2 \left| e^{i\omega_0\tau_1} + e^{i\omega_0\tau_1} \right|^2 \frac{|\underline{a}(S,t)|^2}{2}$$

ce qui donne, tous calculs faits (Formule de Fresnel) :

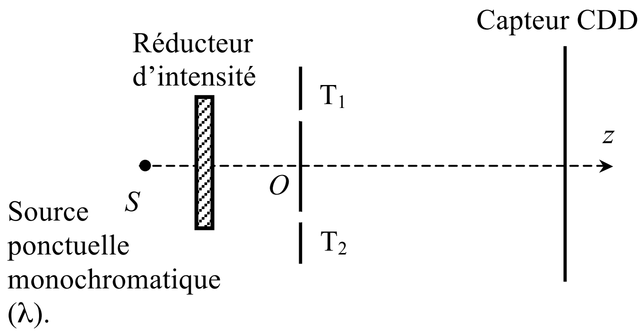
$$I(M) = 2\, t_0^2\, I_S\, [\, 1 + \cos(\omega_0\tau)\,] \quad \text{avec} \quad \tau = \tau_1 - \tau_2 = \frac{\delta(M)}{c} \approx \frac{ax}{c\,D}$$



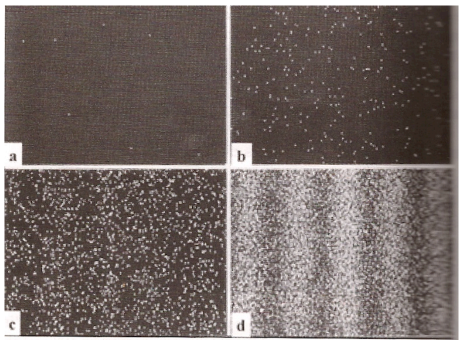
- Dans la théorie corpusculaire, la source S est censée émettre des particules (photons) ayant tous la même énergie $E = h\nu_0 = \hbar\omega_0$. L'intensité lumineuse I_S de la source est alors proportionnelle au nombre de photons qu'elle émet par unité de temps.

Une des nombreuses questions qui se posent est de savoir ce qu'il se produit si, dans l'expérience des trous d'Young, on réduit le nombre de photons émis par seconde jusqu'au point où ceux-ci sont **envoyés un à un dans le dispositif**.

L'écran d'observation est remplacé par un capteur CDD dont la surface est divisée en petits éléments rectangulaires (pixels) permettant d'enregistrer l'impact des photons.



Résultat :



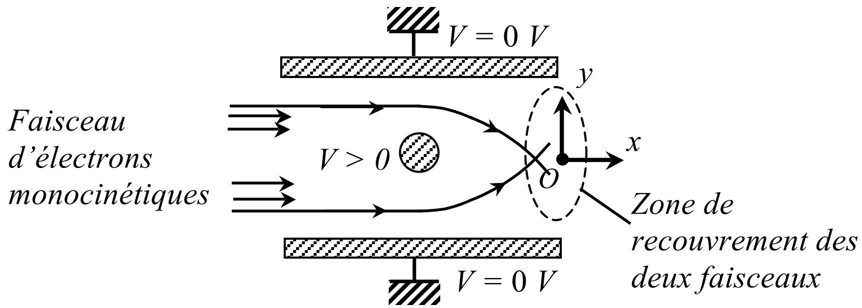
- Chaque photon ayant traversé le dispositif produit sur le détecteur un **impact ponctuel** : aussi petits que soient les pixels, un seul pixel génère un signal électrique, à l'exclusion de tous les autres.
- Les impacts des différents photons se produisent de façon **aléatoire**. Individuellement, les photons se répartissent au hasard sur la surface du capteur, sans ordre apparent.
- Ce n'est qu'au fur et à mesure que le nombre d'impacts de photons s'élève qu'on voit se dessiner progressivement la figure d'interférence classique, formée de franges rectilignes alternativement brillantes et sombres.

  La densité d'impact de photons est très élevée dans les zones qui donnent des franges brillantes, alors qu'elle est nulle dans les zones donnant des franges sombres.

3) Cas de la matière "usuelle" : électrons, protons

Cette expérience peut être répétée avec des particules comme des électrons, protons, etc... : il est possible de concevoir des expériences analogues au dispositif des trous d'Young.

Exemple : expérience de Tonomura en 1989



- On produit un faisceau d'électrons **monocinétiques** (de même vitesse) $\overrightarrow{v}_0 = v_0\,\overrightarrow{e_z}$ donc de même énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ $\Longleftrightarrow$ *Faisceau de photons de même énergie dans une onde lumineuse monochromatique.*

- Ce faisceau arrive sur un dispositif formé de trois électrodes métalliques : deux électrodes planes latérales reliées à la Terre, ce qui les porte au potentiel $V = 0$ V et une électrode cylindrique centrale portée à un potentiel positif ($V > 0$).

  Cela crée un champ électrique qui "rabat" les deux demi-faisceaux passés en haut et en bas du dispositif vers la région centrale ou ils se superposent, après avoir emprunté deux chemins différents $\Longleftrightarrow$ *dispositif interférentiel.*

- On place dans la zone du recouvrement un détecteur sensible aux impacts des électrons, qui joue un rôle analogue à celui d'un écran d'observation en optique. Ce détecteur est constitué de petites cellules sensibles formant des "pixels" et qui sont reliées à des compteurs : on peut donc compter le nombre d'impacts sur chaque cellule.

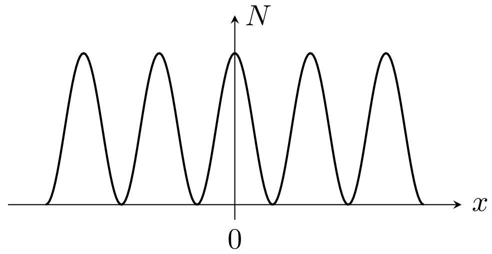
Résultat :

Les observations sont identiques à ce qui se passe pour les photons :

- Lorsque les électrons arrivent un à un, leur impact sur les capteurs se produit de façon aléatoire.

- Lorsque le nombre des impact devient important, la courbe qui représente le nombre d'impacts N en fonction de l'abscisse x devient sinusoïdale avec une période spatiale i (interfrange) caractéristique d'une figure d'interférences à deux ondes :

$$N = N_0\left[1 + \cos\left(2\pi\,\frac{x}{i}\right)\right]$$



- Si on suppose que le faisceau d'électrons émis par la source S est en fait une onde monochromatique de pulsation ω_0 :

$$\underline{a}(S,t) = A_s e^{i\varphi_S}\, e^{-i\omega_0 t}$$

  et qu'on fait un calcul classique de différence de marche $\delta(x)$ entre les deux ondes qui viennent se superposer, on trouve la bonne valeur de l'interfrange i à condition que la fréquence ν_0 soit liée à l'énergie des électrons par une relation du type :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = h\nu_0 = \hbar\omega_0}$$

  où h est la constante de Planck...

4) L'interprétation de la théorie quantique

Comment concilier ces deux aspects ? La réponse de la théorie quantique formulée par Max Born, Werner Heisenberg et Erwin Schrödinger dans les années 1925 - 1926 est la suivante :

1. Les particules microscopiques (électrons, protons, photons, etc...) sont ponctuelles et indivisibles car elles provoquent des impacts ponctuels les capteurs.
2. Cependant, l'aspect aléatoire de ces impacts fait qu'on *ne peut formuler que des lois de nature probabiliste* quant à la position de ces particules.

3. Comme on observe que lorsque le nombre d'impacts devient élevé, ceux-ci reproduisent la figure d'interférence donnée par la théorie ondulatoire, on doit admettre que *certaines positions sont plus probables que d'autres*. La probabilité que l'impact se produise à l'abscisse x sur l'écran est proportionnelle à :

$$\left[1+\cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right]$$

4. Or cette formule provient du carré du module d'une onde complexe $\underline{a}(M,t)$. Ainsi :

   La probabilité que la particule se trouve en M est donc proportionnelle à $|\underline{a}(M,t)|^2$

5) Fonction d'onde

Dans la suite, nous appellerons **quanton** tout objet microscopique comme un électron, un proton, un atome, un photon, etc ...

La mécanique quantique adopte le point de vue énoncé ci-dessous :

À tout quanton est associé une **fonction d'onde à valeurs complexes** $\Psi(M,t)$, dont *le carré du module décrit la probabilité de présence du quanton au point M*. Plus précisément :

P1 (Fonction d'onde)

À tout quanton non relativiste, de masse m et sans spin, on associe une onde scalaire décrite par un champ scalaire $\Psi(M,t)$ à valeurs complexes. $\Psi(M,t)$ est la **fonction d'onde** du quanton.

P2 (Probabilité)

La probabilité pour que le quanton se trouve à l'instant t dans un petit élément de volume $\mathrm{d}\tau_M$ entourant un point M est donnée par :

$$\delta\mathscr{P}(M,t) = |\Psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}\tau_M$$

$|\Psi(M,t)|^2$ est la densité de probabilité de présence.

La probabilité pour que le quanton soit dans un volume V à l'instant t s'obtient en sommant les probabilités. On a donc :

$$\mathscr{P}(V,t) = \iiint_V |\Psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}\tau_M$$

Remarques :

- Au concept classique de trajectoire il faut substituer celui **d'état quantique**. L'état quantique d'une particule (électron, proton,...) est caractérisé par une ***fonction d'onde*** $\underline{\Psi}(M,t)$ qui contient toutes les informations qu'il est possible d'obtenir sur la particule.
- Cette fonction d'onde ne représente pas la propagation d'un signal physique. Il s'agit d'une ***onde de probabilité***. $\Psi(M,t)$ est appelée amplitude de probabilité de présence du quanton au point M et à l'instant t.
- Comme le quanton est nécessairement présent quelque part dans l'espace, la probabilité totale, obtenue par intégration sur tout l'espace, vérifie :

$$\boxed{\forall t,\ \iiint_{\text{Espace}} |\Psi(M,t)|^2\,\mathrm{d}\tau_M = 1}$$

Dans la suite, il nous arrivera souvent pour simplifier de considérer le cas où la fonction d'onde ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace, x par exemple. On dira que le problème est alors *unidimensionnel.*

- La probabilité pour que le quanton possède à l'instant t une abscisse comprise dans l'intervalle élémentaire $[x, x + \mathrm{d}x]$ est donnée par :

$$\boxed{\delta\mathscr{P}(x,t) = |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x}$$

  $|\Psi(x,t)|^2$ est la densité linéique de probabilité de présence.

- La probabilité pour que le quanton possède à l'instant t une abscisse appartenant à l'intervalle $[x_a, x_b]$ est donnée par :

$$\boxed{\mathscr{P}([x_a, x_b], t) = \int_{x_a}^{x_b} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x}$$

- Normalisation de la probabilité :

$$\boxed{\forall\, t,\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1}$$