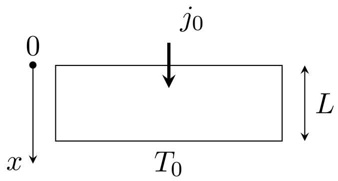
1 Conditions aux limites

En régime stationnaire, le champ des températures au sein d'une dalle d'épaisseur L et de conductivité thermique λ ne dépend que x : $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x)$.



1. On impose en $x = 0$ une densité de courant thermique $j_Q(0) = j_0$ tandis qu'en $x = L$, une source de chaleur (thermostat) maintient la température à la valeur constante T_0. Déterminer $\mathrm{T}(x)$ en fonction de j_0, λ, T_0 et L.
2. Même question si en $x = L$ la dalle est en contact avec un fluide dont la température est T_0 et que le coefficient de conducto-convection est h.

2 Cuisson d'une brioche

Une petite brioche sèche est placée au centre d'un four à micro-ondes de puissance $\mathrm{P} = 850$ W. Le temps de fonctionnement du four est $\Delta t = 90$ s. À sa sortie du four, la brioche a son aspect de départ mais si on la coupe en deux, on constate que le centre est carbonisé. Pour expliquer ce phénomène, on admet qu'environ 30% de la puissance est transmise à la pâte, sous la forme d'ondes électromagnétiques absorbées, et on suppose que la puissance volumique p_V reçue par la brioche est uniforme.

La brioche est une boule sphérique homogène de rayon $R = 5{,}0$ cm ; sa conductivité thermique est $\lambda = 0{,}50$ W.m^{-1}.K $^{-1}$, sa masse est $m = 40$ g et sa capacité thermique massique est c.

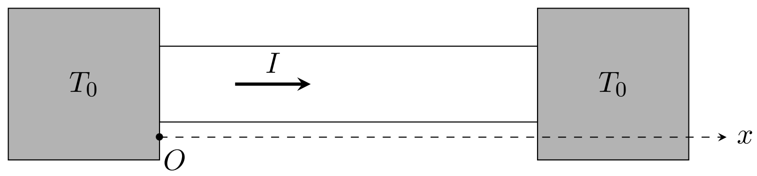
1. Du fait de la puissance reçue du four, un flux thermique radial s'établit : on note $\mathrm{T}(r, t)$ la température en un point de la pâte situé à la distance r du centre O. À l'aide d'un bilan énergétique entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, établir l'équation différentielle en $\mathrm{T}(r, t)$ sous la forme :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{p_V}{\lambda} = A\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

et donner l'expression de A en fonction de c, λ et de la masse volumique ρ de la pâte.
2. On suppose la capacité thermique massique de la brioche négligeable. Comment peut-on simplifier l'équation différentielle précédente ? Déterminer alors l'expression de $\mathrm{T}(r, t)$. Le four étant ventilé, on supposera que la température à l'intérieur de celui-ci est uniforme et vaut $\mathrm{T}_0 = 300$ K.
3. En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de la température au centre de la brioche. Conclure.

3 Résistor électrique

Un résistor (dipôle électrique) est un cylindre métallique d'axe (Ox), de rayon a, de conductivité électrique γ et de conductivité thermique λ. Ses deux extrémités sont maintenues à la température T_0 constante grâce à un thermostat. La surface latérale du cylindre est recouverte d'un isolant thermique.



Le résistor est parcouru par un courant électrique d'intensité constante I. On se place en régime stationnaire et on suppose que la température dans le cylindre ne dépend que de x.

1. Rappeler l'expression de la résistance électrique R d'un cylindre de longueur L, de section S réalisé dans un matériau de conductivité électrique γ.
2. En raisonnant sur une tranche située entre x et $x + \mathrm{d}x$, établir l'équation différentielle à laquelle obéit $T(x)$.
3. En déduire l'expression de $T(x)$. On notera L la longueur du cylindre. Représenter l'allure de $\mathrm{T}(x)$.

4 Choc thermique (*)

On considère un milieu homogène, de conductivité thermique λ, occupant le demi- espace $x > 0$. Pour $t < 0$, le champ de température dans le milieu est uniforme et égal à une constante T_0. À l'instant $t = 0$, la surface $x = 0$ est brusquement portée à la température T_1, puis maintenue à cette température (choc thermique). L'invariance de la situation par translation selon Oy et Oz entraîne que, pour $t > 0$, le champ de température ne dépend que de x et de t et vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}$$

où D est la diffusivité thermique du milieu, supposée constante.

1. Quelles sont les expressions de $\mathrm{T}(x > 0, t = 0^+)$ (condition initiale) et de $\mathrm{T}(x = 0, t > 0)$ (condition aux limites) ?
2. On cherche une solution de l'équation de diffusion précédente sous la forme :

$$\mathrm{T}(x,t) = f(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \quad \text{(variable sans dimension)}$$

   a) Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la fonction $f(u)$ et vérifier qu'une solution est de la forme :

$$f(u) = A + B\int_0^u \exp\left(-y^2\right)\,dy$$

   où A et B sont deux constantes. On admettra qu'il s'agit de la solution générale de cette équation différentielle.

   b) Déterminer les expressions des constantes A et B en fonction de T_0 et T_1. On donne :

$$\int_0^\infty \exp\left(-y^2\right)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. Quelle est l'expression de la densité de courant thermique $j_Q(x,t)$ et en déduire sa valeur à la surface du matériau, en $x = 0$. Que peut-on en conclure ?
4. Le milieu étudié est de l'aluminium dont la diffusivité thermique est $D = 8{,}0.10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. On donne $\mathrm{T}_0 = 293$ K et $\mathrm{T}_1 = 420$ K. Calculer les instants t_1 et t_2 au bout desquels la température est égale à 90% de T_1 à des profondeurs $x_1 = 1$ cm et $x_2 = 10$ cm. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs numériques de la fonction $u \mapsto F(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^u \exp\left(-y^2\right)\,dy$:

u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$
0	0	0,3	0,33	0,6	0,60	0,9	0,80
0,1	0,11	0,4	0,43	0,7	0,68	1,0	0,84
0,2	0,22	0,5	0,52	0,8	0,74	1,1	0,88

5 Température et densité de courant thermique dans un mur

On considère un mur de très grande épaisseur qu'on assimilera à un milieu semi-infini occupant le demi-espace $x > 0$. ce mur est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On notera $D = \lambda/\rho c$ la diffusivité thermique de ce matériau.

On ne considère que la seule variable d'espace x et on suppose qu'en $x = 0$, la température est de la forme $\mathrm{T}(0,t) = \mathrm{T}_0 + \Delta\mathrm{T}\,\cos(\omega t)$. On notera $\mathrm{T}(x,t)$ la température à une profondeur x dans le mur et $j_Q(x,t)$ la densité de courant thermique associée.

1. À l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire située dans $[x,\ x+\mathrm{d}x]$, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $\theta(x,t) = \mathrm{T}(x,t) - \mathrm{T}_0$.
2. On pose $\theta(x,t) = \mathrm{Re}[\,\underline{f}(x)\exp(i\omega t)]$ où $\underline{f}(x)$ est une fonction à valeur complexe de la variable réelle x à déterminer. Montrer que $\underline{f}(x)$ vérifie une équation différentielle dont la solution générale est :
$$\underline{f}(x) = \underline{A}\exp\left[-\frac{(1+i)x}{\delta}\right] + \underline{B}\exp\left[\frac{(1+i)x}{\delta}\right]$$
où δ est une constante à déterminer en fonction de ω et D et où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux constantes complexes. Quelle est la dimension de δ ?
3. Compte tenu des conditions aux limites, déterminer les constantes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ et en déduire la température $\theta(x,t)$ à l'intérieur du mur.
4. On a observé les amplitudes suivantes pour les oscillations journalières de température :

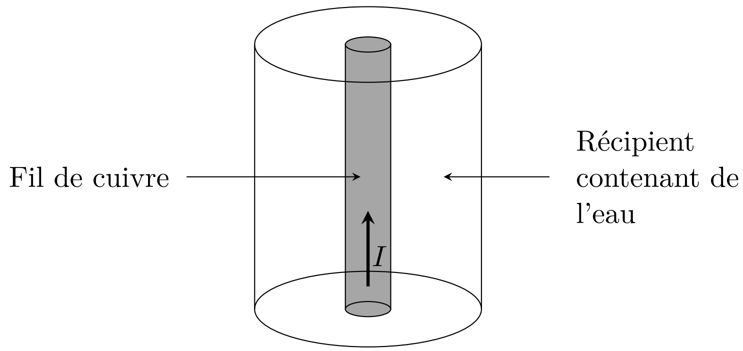
profondeur (cm)	0	12	20	30
amplitude (°C)	14,0	12,2	11,1	9,9

En déduire une valeur approchée du coefficient de diffusion thermique du mur.

6 Bouilloire

On considère un récipient cylindrique de hauteur très grande et de rayon $R = 4$ cm qui contient de l'eau de conductivité thermique $\lambda = 0{,}61\ \mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$. Ce récipient est traversé en son centre par un fil de cuivre de rayon $a = 3{,}0$ mm et de résistivité électrique $\rho_{\mathrm{el}} = 1{,}72.10^{-8}\ \Omega.\mathrm{m}$, parcouru par un courant constant $I = 1{,}0$ A. Les parois latérales extérieures du récipient sont maintenues à une température constante $T_0 = 298$ K.

On suppose qu'un régime stationnaire est atteint.



1. Quelle est la résistance électrique du fil de cuivre sur une hauteur h ?
2. Comme la hauteur du cylindre est très grande, on va négliger les effets de bord, ce qui revient à considérer que la température dans l'eau ne dépend que de r : $T = T(r)$.
   a) À l'aide du premier principe de la thermodynamique appliqué à une coquille cylindrique située entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$ dans l'eau.
   b) On désigne par $\Phi(a)$ le flux thermique à travers la surface latérale du fil de cuivre (orientée du fil vers l'eau). En régime

stationnaire, la température du fil est constante. En déduire la relation entre $\Phi(a)$, ρ_{el}, a, h et I.

3. Déterminer la température $T(r)$ dans l'eau en fonction de r.

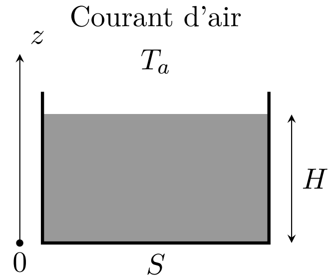
7 Chauffage d'un liquide (*)

Un récipient est rempli d'eau liquide jusqu'à une hauteur H. Ce récipient, de forme cylindrique, possède une base dont la surface est S. Au niveau de sa surface libre, l'eau est en contact avec un courant d'air chaud de température constante T_a.

On note h le coefficient de conducto-convection entre l'eau et l'air, ρ_ℓ la masse volumique de l'eau, c_ℓ sa capacité thermique massique et λ_ℓ sa conductivité thermique.

Au début (instant $t = 0$) on suppose que la température de l'eau liquide est uniforme et vaut $T_i < T_a$. Pour simplifier, on supposera que les parois du récipient et le fond de celui-ci sont adiabatiques : aucun échange de chaleur ne peut donc exister à ce niveau. On supposera de plus que, pour $t > 0$, le champ des températures dans l'eau est de la forme : $T(z,t)$. Il obéit à l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda_\ell}{\rho_\ell c_\ell}$$

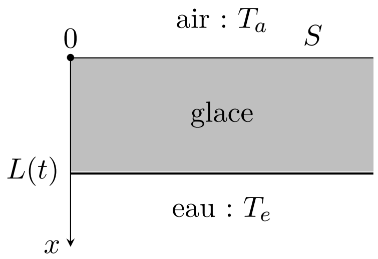


1. On cherche une solution de la forme $T(z,t) = T_a + g(z)f(t)$ (séparation des variables), avec $f(0) = 1$. Montrer que f obéit nécessairement à l'équation différentielle :
$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\,\alpha$$
où α est une constante. Quel est le signe de α ? Expliciter la solution $f(t)$.
2. a) Donner l'équation différentielle vérifiée par $g(z)$. En déduire sa solution en fonction de deux constantes qu'on notera A et B.
   b) En étudiant les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = H$, montrer que l'une des constantes est nulle et que la constante α vérifie l'équation :
   $$\text{cotan}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,H\right) = \frac{\lambda_\ell}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{D}}$$
   c) On pose $x = \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,H$. Par un raisonnement graphique, montrer que les solutions de l'équation précédente forment une suite infinie x_n, $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite, on notera α_n la valeur de α associée à x_n.
   d) Pourquoi la fonction $g(z)$ obtenue à la question a) ne peut convenir pour décrire la situation ?
   e) Expliquer pourquoi la fonction ci-dessous :
   $$T(z,t) = T_a + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, e^{-\alpha_n t} \cos\left(\sqrt{\frac{\alpha_n}{D}}\, z\right)$$
   est aussi une solution de l'équation de diffusion. *On admettra que cette expression peut convenir pour décrire correctement l'évolution de la température dans le liquide.*
3. On donne $c_\ell = 4{,}18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} ; $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $\lambda_\ell = 0{,}61$ W.m^{-1}.K^{-1}, $h = 250$ W.m^{-2}.K^{-1} et $H = 50$ cm. À l'aide de la calculette, donner la valeur approchée de α_0.

8 Congélation d'un lac (*)

L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation constante $T_e = 273$ K, sous 1 bar. L'air au dessus du lac est à la température constante $T_a = 263$ K. Libre de glace à l'instant initial $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est notée $L(t)$.

Dans tout l'exercice on supposera la pression P uniforme et stationnaire en tout point du lac.



- La glace a une masse volumique ρ_g constante, une conductivité thermique λ_g et une capacité thermique massique que l'on négligera : $c_g \approx 0$
- L'eau liquide a une masse volumique ρ_e constante.
- La chaleur latente massique de fusion est notée ℓ_f (constante).

La puissance thermique échangée à l'interface glace-air est donnée par la loi de Newton :

$$\mathscr{P}_{\text{th}} = h\,(\,T_0(t) - T_a\,)\,S$$

pour une surface S de glace. $T_0(t)$ est la température de la glace en $x = 0^+$ à l'instant t : $T_a < T_0(t) < T_e$.

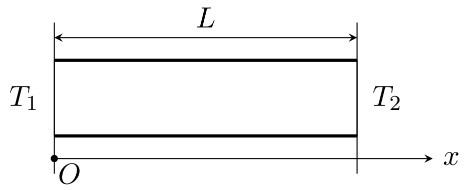
Données numériques :

$\rho_g = 9{,}0.10^2$ kg.m^{-3} ; $\rho_e = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} ;
$\lambda_g = 2{,}09$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\ell_f = 334$ kJ.kg^{-1} ;
$h = 41{,}8$ W.m^{-2}.K^{-1}.

1. On raisonne dans un premier temps sur la couche de glace, de section $S = 1$ m^2 et d'épaisseur $L(t)$ à l'instant t. Les extrémités de cette couche sont à des températures distinctes : $T_0(t)$ pour $x = 0$ et T_e pour $x = L(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de discontinuité de la température en $L(t)$).
   a) Donner l'équation locale vérifiée par la température $T(x,t)$ dans la glace et déterminer son expression.
   b) Déterminer la densité de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}(x,t)$.
   c) En traduisant la continuité du flux thermique à l'interface air - glace, en déduire la loi $T_0(t)$ en fonction de T_e, T_a, h, $L(t)$ et λ_g.
2. Entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, une masse δm d'eau liquide se transforme en glace, ce qui accroît l'épaisseur de glace d'une quantité dL.
   a) Appliquer le premier principe à cette masse δm entre t et $t + \mathrm{d}t$ et en déduire la chaleur élémentaire δQ échangée au cours de cette transformation.
   b) En déduire le flux thermique $\Phi(t)$ à travers l'interface glace-eau à l'instant t (l'interface étant orientée selon $+\overrightarrow{e_x}$) en fonction de ρ_g, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$, ℓ_f et S.
   c) Déterminer l'épaisseur de la glace $L(t)$ formée à l'instant t, ainsi que $T_0(t) - T_a$. On notera :
   $$L_0 = \lambda_g/h \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\lambda_g \rho_g\, \ell_f}{2h^2\,(T_e - T_a)}$$
3. Tracer le graphe $L(t)$. On exprimera L en cm et t en heures, après avoir calculé L_0 et τ.

9 Bilans entropiques

On considère un barreau cylindrique solide de masse volumique ρ, capacité thermique massique c, de section A et de longueur L, en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures T_1 et T_2. La face latérale du barreau est isolée thermiquement.



Le régime stationnaire est réalisé et la température dans le barreau ne dépend que de x.

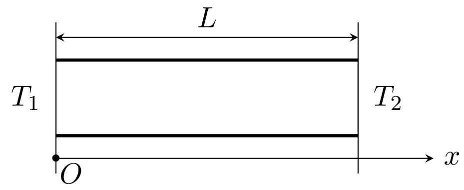
On donne l'entropie massique d'une phase condensée idéale de capacité thermique massique c à la température T :

$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + s(T_1)$$

1. Quelle est la répartition de température $T(x)$ dans le barreau ?
2. Déterminer l'entropie S du barreau. On posera $S_1 = ms(T_1)$ où m est la masse totale du barreau.
3. Déterminer le taux d'entropie échangée $\tau_{\text{éch}}$ entre le barreau et les deux sources de chaleur.
4. Quel est le taux τ_C d'entropie créée ?

10 Évolution adiabatique d'un barreau

On reprend la situation de l'exercice précédent. Un barreau cylindrique solide de masse volumique ρ, capacité thermique massique c, de section A et de longueur L, en contact à ses deux extrémités avec deux sources de chaleur de températures T_1 et T_2. La face latérale du barreau est isolée thermiquement.



Le régime stationnaire est réalisé et la température dans le barreau ne dépend que de x.

On retire les deux sources de chaleur et on isole thermiquement les deux extrémités du barreau qui évolue ainsi de façon totalement adiabatique. Un équilibre thermodynamique finit par s'établir, dans lequel la température du barreau est T_F.

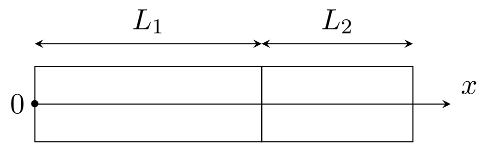
Calculer T_F.

Dans les deux exercices suivants, le régime est stationnaire. On utilisera la notion de résistance thermique.

11 Répartition de température dans deux barres

1. On étudie deux barres cylindriques de même section S, mises bout à bout. Les deux barres sont supposée être isolées thermiquement sur toute leur surface latérale et on suppose que la température ne dépend que de x. On se place en régime stationnaire.

   La première barre a une longueur L_1 et une conductivité thermique λ_1 et la seconde une longueur L_2 et une conductivité thermique λ_2. On impose les température en $x = 0$ et en $x = L_1+L_2$: $\mathrm{T}(x=0) = \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}(x = L_1 + L_2) = \mathrm{T}_2$.



a) Faire un schéma électrocinétique équivalent pour cet ensemble et en déduire la température T_i à la jonction des deux barres en fonction de T_1, T_2, L_1, L_2, λ_1 et λ_2.

b) En déduire la répartition de température $T(x)$ dans les deux tiges lorsque x varie de 0 à $L_1 + L_2$.

2. On reprend la question 1. en supposant qu'au lieu d'imposer la température T_2 en $x = L_1 + L_2$, on plonge l'extrémité de la barre 2 dans un liquide de température T_2 constante. On notera h le coefficient de conducto-convection entre le solide et le liquide.

12 Résistance thermique d'un tube

Un tube de longueur $L = 1{,}0$ m est limité par deux cylindres concentriques de rayons $R_1 = 15$ cm et $R_2 = 25$ cm respectivement maintenus aux températures constantes T_1 et T_2. Ce tube délimite un matériau homogène de conductivité thermique $\lambda = 370$ W.m^{-2}.K^{-1}. Sa longueur L étant très grande, les effets de bord sont négligeables et la température dans le tube ne dépend que de la distance r à l'axe de celui-ci. On étudie le régime permanent.

1. Déterminer la résistance thermique R_{th} de ce tube.
2. On entoure le cylindre extérieur de rayon R_2 par une gaine isolante d'épaisseur $e = 3{,}0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_g = 3{,}0$ W.m^{-2}.K^{-1}. La température du cylindre de rayon R_2+e est égale à T_2.

   a) Calculer la nouvelle résistance thermique R'_{th} de l'ensemble.

   b) Déterminer le rapport ϕ'_Q/ϕ_Q des flux thermiques avec la gaine isolante et sans la gaine isolante. Application numérique : calculer ce rapport.