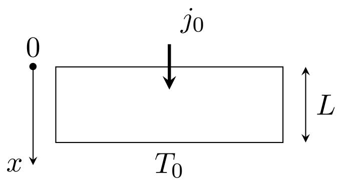
1 Équation de diffusion pour j_Q

Montrer que dans une phase condensée idéal sans densité volumique de puissance $p_v = 0$ et au sein de laquelle le champ de température ne dépend que de x et de t, la densité de courant thermique $j_Q(x,t)$ vérifie la même équation que la température.

2 Conditions aux limites

En régime stationnaire, le champ des températures au sein d'une dalle d'épaisseur L et de conductivité thermique λ ne dépend que x : $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x)$.

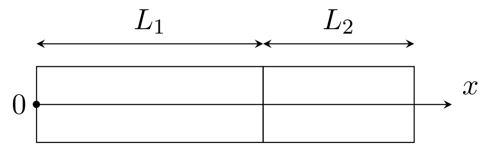


1. On impose en $x = 0$ une densité de courant thermique $j_Q(0) = j_0$ tandis qu'en $x = L$, un thermostat maintient la température à la valeur constante T_0. Déterminer $\mathrm{T}(x)$ en fonction de j_0, λ, T_0 et L.
2. Même question si en $x = L$ la dalle est en contact avec un fluide dont la température est T_0 et que le coefficient de conducto-convection est h.

3 Répartition de température dans deux barres

1. Une barre cylindrique de longueur L et d'axe Ox est thermiquement isolée sur toute sa surface latérale. On se place en régime stationnaire et on suppose que la température au sein de la barre ne dépend que de x : $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x)$. À l'aide de deux thermostats, on impose une température T_1 en $x = 0$ et une température T_2 en $x = L$. Déterminer $\mathrm{T}(x)$.
2. On étudie maintenant deux barres cylindriques de même section S, mises bout à bout. La première a une longueur L_1 et une conductivité thermique λ_1 et la seconde une longueur L_2 et une conductivité thermique λ_2. On impose à nouveau les température en $x = 0$ et en $x = L_1 + L_2$: $\mathrm{T}(x = 0) = \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}(x = L_1 + L_2) = \mathrm{T}_2$.

   En écrivant l'équation de diffusion thermique dans chacune des deux barres, expliciter $T(x)$ pour $x \in [0, L_1]$ et $T(x)$ pour $x \in [L_1, L_1 + L_2]$ en fonction de quatre constantes. En étudiant les conditions aux limites, déterminer ces constantes et en déduire la répartition de température $\mathrm{T}(x)$ dans les deux barres.



3. On utilise maintenant la notion de résistance thermique pour étudier l'association des deux barres.

   a) Les températures aux deux extrémités étant toujours T_1 et T_2, faire un schéma électrocinétique équivalent pour cet ensemble et en déduire la température T_i à la jonction des deux barres.

   b) Même question si, au lieu d'imposer la température T_2 en $x = L_1 + L_2$, on plonge l'extrémité de la barre 2 dans un liquide de température T_2. On notera h le coefficient de conducto-convection entre le solide et le liquide.

4 Cuisson d'une brioche

Une petite brioche sèche est placée au centre d'un four à micro-ondes de puissance $\mathrm{P} = 850$ W. Le temps de fonctionnement du four est $\Delta t = 90$ s. À sa sortie du four, la brioche a son aspect de départ mais si on la coupe en deux, on constate que le centre est carbonisé. Pour expliquer ce phénomène, on admet qu'environ 30% de la puissance est transmise à la pâte, sous la forme d'ondes électromagnétiques absorbées, et on suppose que la puissance volumique p_V reçue par la brioche est uniforme.

La brioche est une boule sphérique homogène de rayon $R = 5{,}0$ cm ; sa conductivité thermique est $\lambda = 0{,}50$ W.m^{-1}.K $^{-1}$, sa masse est $m = 40$ g et sa capacité thermique massique est c.

1. Du fait de la puissance reçue du four, un flux thermique radial s'établit : on note $\mathrm{T}(r,t)$ la température en un point de la pâte situé à la distance r du centre O. À l'aide d'un bilan énergétique entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, établir l'équation différentielle en $\mathrm{T}(r,t)$ sous la forme :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{p_V}{\lambda} = A\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

   et donner l'expression de A en fonction de c, λ et de la masse volumique ρ de la pâte.

2. On suppose la capacité thermique massique de la brioche négligeable. Comment peut-on simplifier l'équation différentielle précédente ? Déterminer alors l'expression de $\mathrm{T}(r,t)$. Le four étant ventilé, on supposera que la température à l'intérieur de celui-ci est uniforme et vaut $\mathrm{T}_0 = 300$ K.

3. En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de la température au centre de la brioche. Conclure.

5 Choc thermique

On considère un milieu homogène, de conductivité thermique λ, occupant le demi- espace $x > 0$. Pour $t < 0$, le champ de température dans le milieu est uniforme et égal à une constante T_0. À l'instant $t = 0$, la surface $x = 0$ est brusquement portée à la température T_1, puis maintenue à cette température (choc thermique). L'invariance de la situation par translation selon Oy et Oz entraîne que, pour $t > 0$, le champ de température ne dépend que de x et de t et vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}$$

où D est la diffusivité thermique du milieu, supposée constante.

1. Quelles sont les expressions de $\mathrm{T}(x > 0, t = 0^+)$ (condition initiale) et de $\mathrm{T}(x = 0, t > 0)$ (condition aux limites) ?

2. On cherche une solution de l'équation de diffusion précédente sous la forme :

$$\mathrm{T}(x,t) = f(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \quad \text{(variable sans dimension)}$$

   a) Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la fonction $f(u)$ et vérifier qu'une solution est de la forme :

$$f(u) = A + B\int_0^u \exp\left(-y^2\right)\,dy$$

   où A et B sont deux constantes. On admettra qu'il s'agit de la solution générale de cette équation différentielle.

   b) Déterminer les expressions des constantes A et B en fonction de T_0 et T_1. On donne :

$$\int_0^\infty \exp\left(-y^2\right)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. Quelle est l'expression de la densité de courant thermique $j_Q(x,t)$ et en déduire sa valeur à la surface du matériau, en $x = 0$. Que peut-on en conclure ?
4. Le milieu étudié est de l'aluminium dont la diffusivité thermique est $D = 8{,}0.10^{-5}$ m^2.s^{-1}. On donne $\mathrm{T}_0 = 293$ K et $\mathrm{T}_1 = 420$ K. Calculer les instants t_1 et t_2 au bout desquels la température est égale à 90% de T_1 à des profondeurs $x_1 = 1$ cm et $x_2 = 10$ cm.

   Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs numériques de la fonction $u \mapsto F(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^u \exp\left(-y^2\right) dy$:

u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$	u	$F(u)$
0	0	0,3	0,33	0,6	0,60	0,9	0,80
0,1	0,11	0,4	0,43	0,7	0,68	1,0	0,84
0,2	0,22	0,5	0,52	0,8	0,74	1,1	0,88

6 Température et densité de courant thermique dans un mur

On considère un mur de très grande épaisseur qu'on assimilera à un milieu semi-infini occupant le demi-espace $x > 0$. ce mur est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On notera $D = \lambda/\rho c$ la diffusivité thermique de ce matériau.

On ne considère que la seule variable d'espace x et on suppose qu'en $x = 0$, la température est de la forme $\mathrm{T}(0,t) = \mathrm{T}_0 + \Delta\mathrm{T}\,\cos(\omega t)$. On notera $\mathrm{T}(x,t)$ la température à une profondeur x dans le mur et $j(x,t)$ la densité de courant thermique associée.

1. À l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire située dans $[x,\ x + dx]$, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $\theta(x,t) = \mathrm{T}(x,t) - \mathrm{T}_0$.
2. On pose $\theta(x,t) = Re[\underline{\Theta}(x)\exp(i\omega t)]$ où $\underline{\Theta}(x)$ est une fonction à valeur complexe de la variable réelle x à déterminer. Montrer que $\underline{\Theta}(x)$ vérifie une équation différentielle sont la solution générale est :
$$\underline{\Theta}(x) = \underline{A}\exp\left[-\frac{(1+i)x}{\delta}\right] + \underline{B}\exp\left[\frac{(1+i)x}{\delta}\right]$$
   où δ est une constante à déterminer en fonction de ω et D et où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux constantes complexes. Quelle est la dimension de δ ?
3. Compte tenu des conditions aux limites, déterminer les constantes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ et en déduire la température $\theta(x,t)$ à l'intérieur du mur.
4. On a observé les amplitudes suivantes pour les oscillations journalières de température :

profondeur (cm)	0	12	20	30
amplitude (°C)	14,0	12,2	11,1	9,9

   En déduire une valeur approchée du coefficient de diffusion thermique du mur.

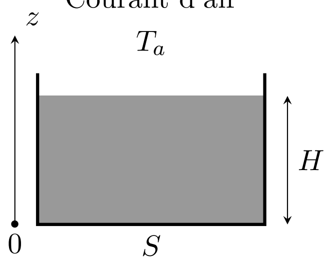
7 Chauffage d'un liquide

Un récipient est rempli d'eau liquide jusqu'à une hauteur H. Ce récipient, de forme cylindrique, possède une base dont la surface est S. Au niveau de sa surface libre, l'eau est en contact avec un courant d'air chaud de température constante T_a.

On note h le coefficient de conducto-convection entre l'eau et l'air, ρ_ℓ la masse volumique de l'eau, c_ℓ sa capacité thermique massique et λ_ℓ sa conductivité thermique.

Au début (instant $t = 0$) on suppose que la température de l'eau liquide est uniforme et vaut $T_i < T_a$. Pour simplifier, on supposera que les parois du récipient et le fond de celui-ci sont adiabatiques : aucun échange de chaleur ne peut donc exister à ce niveau. On supposera de plus que, pour $t > 0$, le champ des températures dans l'eau est de la forme : $T(z,t)$. Il obéit à l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda_\ell}{\rho_\ell c_\ell}$$



1. On cherche une solution de la forme $T(z,t) = T_a + g(z)f(t)$ (séparation des variables), avec $f(0) = 1$. Montrer que f obéit nécessairement à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\,\alpha$$

   où α est une constante. Quel est le signe de α ? Expliciter la solution $f(t)$.

2. a) Donner l'équation différentielle vérifiée par $g(z)$. En déduire sa solution en fonction de deux constantes qu'on notera A et B.

   b) En étudiant les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = H$, montrer que l'une des constantes est nulle et que la constante α vérifie l'équation :

$$\text{cotan}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,H\right) = \frac{\lambda_\ell}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{D}}$$

   c) On pose $x = \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\,H$. Par un raisonnement graphique, montrer que les solutions de l'équation précédente forment une suite infinie x_n, $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite, on notera α_n la valeur de α associée à x_n.

   d) Pourquoi la fonction $g(z)$ obtenue à la question a) ne peut convenir pour décrire la situation ?

   e) Expliquer pourquoi la fonction ci-dessous :

$$T(z,t) = T_a + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, e^{-\alpha_n t}\,\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha_n}{D}}\,z\right)$$

   est aussi une solution de l'équation de diffusion. *On admettra que cette expression peut convenir pour décrire correctement l'évolution de la température dans le liquide.*

3. On donne $c_\ell = 4{,}18$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} ; $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $\lambda_\ell = 0{,}61$ W.m^{-1}.K^{-1}, $h = 250$ W.m^{-2}.K^{-1} et $H = 50$ cm. À l'aide de la calculette, donner la valeur approchée de α_0.

Dans les deux exercices suivants, le régime est stationnaire. On utilisera la notion de résistance thermique.

8 Résistance thermique d'un tube

Un tube de longueur $L = 1{,}0$ m est limité par deux cylindres concentriques de rayons $R_1 = 15$ cm et $R_2 = 25$ cm respectivement maintenus aux températures constantes T_1 et T_2. Ce tube délimite un matériau homogène de conductivité thermique $\lambda = 370$ W.m^{-2}.K^{-1}. Sa longueur L étant très grande, les effets de bord sont négligeables et la température dans le tube ne dépend que de la distance r à l'axe de celui-ci. On étudie le régime permanent.

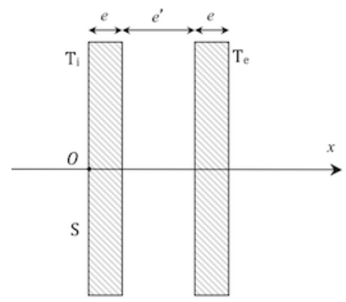
1. Déterminer la résistance thermique R_{th} de ce tube.

2. On entoure le cylindre extérieur de rayon R_2 par une gaine isolante d'épaisseur $e = 3{,}0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_g = 3{,}0$ W.m^{-2}.K^{-1}. La température du cylindre de rayon $R_2{+}e$ est égale à T$_2$.
   a) Calculer la nouvelle résistance thermique R'$_{th}$ de l'ensemble.
   b) Déterminer le rapport ϕ'_Q/ϕ_Q des flux thermiques avec la gaine isolante et sans la gaine isolante. Application numérique : calculer ce rapport.

9 Double vitrage

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe Ox et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces internes et externes sont respectivement aux températures T$_i$ et T$_e$ avec T$_e$ < T$_i$.

1. La paroi est une simple vitre d'épaisseur $2e$. Déterminer le flux thermique ϕ_{th_1} sortant de la pièce par cette paroi en fonction de λ, S, e, T$_i$ et T$_e$.
2. La paroi est une double-vitre, ensemble de deux vitres de même épaisseur e séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique λ_a (voir figure ci-dessous).
   a) Déterminer le flux thermique ϕ_{th_2} sortant de la pièce, puis le rapport ϕ_{th_2}/ϕ_{th_1}. Application numérique : calculer ce rapport avec : T$_e$ = 270 K ; T$_i$ = 292 K ; $e' = e = 3$ mm ; $\lambda = 1{,}2$ W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda_a = 0{,}025$ W.m^{-1}.K^{-1}. Ce résultat vous semble-t-il réaliste ?
   b) Déterminer les températures T$_1$ et T$_2$ des faces en regard des deux vitres avec les données numériques ci-dessus. Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.



3. En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges superficiels de chaleur entre un solide et le fluide avec lequel il est en contact. Une surface d'aire S du solide, à la température T$_S$ échange avec le fluide à la température T$_f$ la puissance thermique : $P_{th} = hS\,|\,\mathrm{T}_S - \mathrm{T}_f\,|$ avec $h > 0$.
   a) Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait T$_S$ et T$_f$?
   b) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R$_{th}$ et donner son expression.
   c) Les températures de l'air à l'intérieur de la pièce et à l'extérieur sont respectivement T'$_i$ et T'$_e$. Soient h_e le coefficient à l'interface verre-air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts air- verre.
   Déterminer les flux ϕ'_{th_1} (vitre simple) et ϕ'_{th_2} (double vitrage) en fonction de T'$_i$, T'$_e$, h_i, h_e et des paramètres e, λ, λ_a et S.
   Application numérique : $h_i = 10$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $h_e = 14$ W.m^{-2}.K^{-1}. Calculer $\phi'_{th_2}/\phi'_{th_1}$. Conclusion ?