Feuille 2 : Révisions Électromagnétisme

Chapitres à réviser :

- Électromagnétisme : Électrostatique - Magnétostatique - Équations de Maxwell - Ondes dans le vide - Énergie - Ondes dans les métaux, plasmas - Induction électromagnétique.

Revoir les questions de cours des thèmes d'électromagnétisme (disponibles sur le site de la classe) ainsi que l'induction de MPSI.

1 Bobine en régime variable

On donne pour $\overrightarrow{A} = A(r,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA)}{\partial r}\,\overrightarrow{e_z}$$

1. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par une bobine très longue de rayon $R = 10$ cm comportant $n = 1000$ spires par unité de longueur et parcourue par un courant stationnaire d'intensité I.
2. On a maintenant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. On suppose l'expression de $\overrightarrow{B}$ toujours valable. Justifier que le champ électrique dans la bobine est de la forme : $\overrightarrow{E} = E(r,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$ et déterminer l'expression de $E(r,t)$ pour $r < R$.
   a) En utilisant une équation de Maxwell.
   b) En utilisant la forme intégrale de l'équation précédente.
3. Comparer les densités d'énergie électrique u_e et magnétique u_m dans le cas où $\omega R \ll c$.
4. Un cylindre métallique de cuivre de même rayon R que le solénoïde et de longueur L est introduit à l'intérieur du solénoïde. On suppose que le champ électrique dans le cylindre est le même que celui calculé à la question 3. Le cuivre est un conducteur ohmique de conductivité γ
   a) Quelle est la puissance électromagnétique P_{em} reçue par les électrons de conduction du cylindre ?
   b) On suppose que cette puissance est utilisée pour augmenter la température du cuivre (cette tempéraure étant supposée uniforme dans tout le volume du cylindre). Quelle est la durée τ au bout de laquelle sa température s'est élevée de $\Delta T = 1$ °C ? On supposera que $\omega\tau \gg 1$ et on fera les approximations adéquates.

Données :
Masse volumique du cuivre : $\rho = 8{,}96 \times 10^3$ kg.m^{-3}
Capacité thermique massique du cuivre : $c = 380$ J.K^{-1}.kg^{-1}
Conductivité électrique du cuivre : $\gamma = 5{,}96 \times 10^7$ S.m^{-1}
$f = \omega/2\pi = 100$ Hz
$I_0 = 1{,}0$ A

2 Électrostatique

On considère un demi-espace $x > 0$ chargé avec une densité volumique de charge $\rho(x) = \rho_0\,e^{-x/\delta}$, où ρ_0 et δ sont positifs. Pour $x \leqslant 0$, la densité volumique de charge est nulle. Cette distribution génère un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

Déterminer ce champ électrostatique en tout point de l'espace. On supposera que $\overrightarrow{E}$ s'annule lorsque $x \to +\infty$.

3 Électrostatique

On considère une région vide de charges dans laquelle les lignes de champ électrostatique sont des droites parallèles à l'axe Ox.

1. Quelle est à priori l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en un point M de cette région, dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) ?
2. En utilisant les deux équations locales de l'électrostatique, montrer que ce champ électrostatique est uniforme.

4 Condensateur *

On dispose de deux disques métalliques chargés, de même rayon R, placés en $z = e/2$ et en $z = -e/2$. On néglige les effets de bords. Le disque situé en $z = -e/2$ est au potentiel V_0 et celui en $z = e/2$ est au potentiel $-V_0$. On suppose que le champ électrique est nul pour $z < -e/2$ et $z > e/2$. On donne la relation de passage :

$$\overrightarrow{E}(M_2) - \overrightarrow{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{12}}$$

On se place dans le cadre du régime stationnaire.

1. a) L'espace entre les deux disques est de l'air qui, du point de vue des propriétés électromagnétiques, peut être assimilé au vide. Déterminer le potentiel électrique $V(z)$ pour $z \in [-e/2, e/2]$.
   b) Déterminer les densités surfaciques de charges sur chaque disque.
   c) Calculer la capacité C de ce condensateur.
2. On place désormais des anions et des cations entre les 2 disques du condensateur. Ils sont à la température T et on note $n_-(z)$ et $n_+(z)$ respectivement le nombre d'anions par unité de volume et le nombre de cations par unité de volume.

   On suppose que :

   $$V(z = 0) = 0 \quad ; \quad \lim_{z \to 0} n_-(z) = n_0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \to 0} n_+(z) = n_0$$

   On note $\rho(z)$ la densité volumique de charge, $V(z)$ le potentiel en z et on suppose que les anions et cations obéissent à la statistique de Boltzmann.

   a) Déterminer la relation entre $\rho(z)$, k_B, T et $V(z)$.
   b) On suppose que $e|V(z)| \ll k_B T$. Déterminer la nouvelle capacité C' du condensateur.

5 Solénoïde épais *

On considère un solénoïde de longueur infinie, constitué d'un milieu conducteur compris entre les rayons R_1 et $R_2 > R_1$, d'axe Oz.

L'intérieur du solénoïde est vide et on considérera que le solénoïde est infini. Dans le milieu conducteur circulent des courants indépendants du temps décrits par la densité volumique de courant $\overrightarrow{j} = j_0\,\overrightarrow{e_\theta}$ où j_0 est constant

1. À l'aide du théorème d'Ampère déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par ce solénoïde. On supposera que $\overrightarrow{B} = \vec{0}$ pour $r > R_2$.
2. Si on suppose que l'espace entre les rayons R_1 et R_2 est en fait un bobinage serré réalisé avec un fil de cuivre de section carrée, l'arête valant a, évaluer la longueur totale ℓ du fil utilisé pour une longueur L, avec les données suivantes :

   $$a = 1{,}0\,\text{mm} \ ; \ R_1 = 3{,}0\,\text{cm} \ ; \ R_2 = 5{,}0\,\text{cm}; \ L = 25\,\text{cm}$$

3. Le fil du bobinage est en cuivre, dont la résistivité électrique est $\rho = 5{,}96\times10^7$ S.m^{-1}. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule dans une longueur L du solénoïde si on veut y établir un champ magnétique $B = 1{,}0$ T sur l'axe Oz ?
   On prendra $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}.

6 Nappes de courant accolées *

On considère deux nappes de même épaisseur a, d'extension infinie selon Ox et Oz et parcourues par des densités de courant stationnaires décrites par les équations suivantes :

$$\vec{j}(y) = \begin{cases} -j_0\,\overrightarrow{e_x} & \text{si } y \in [-a, 0[\\ j_0\,\overrightarrow{e_x} & \text{si } y \in [0, a] \\ \vec{0} & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

où $j_0 > 0$ est une constante.

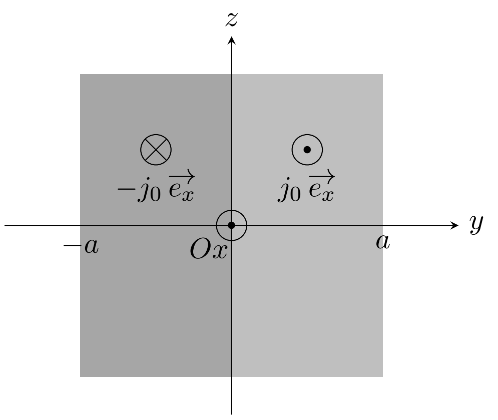

Figure 1 –

1. On étudie le champ magnétostatique $\overrightarrow{B_+}(M)$ créé uniquement par la nappe de courant située à droite, de densité de courant $j_0\,\overrightarrow{e_x}$ en un point M quelconque. Déterminer $\overrightarrow{B_+}(M)$ à l'aide d'une équation de Maxwell.
2. En déduire le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ créé par l'ensemble des deux nappes en tout point de l'espace.
3. Représenter ce champ en fonction de y.

7 Moments dipolaires électriques

L'espace étant rapporté à un repère $(Oxyz)$ on considère deux molécules m_1 et m_2 ayant des moments dipolaires $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$.
$\overrightarrow{p_1} = p_1\,\overrightarrow{e_z}$ est un moment permanent tandis que $\overrightarrow{p_2}$ est un moment induit dont l'expression est :

$$\overrightarrow{p_2} = \alpha\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}_{1\to2}$$

où α est la polarisabilité et où $\overrightarrow{E}_{1\to2}$ est le champ électrostatique créé par la molécule m_1 au point où est placée la molécule m_2.

Le potentiel électrostatique créé en un point M par un dipôle électrostatique placé en O et de moment dipolaire $\vec{p}$ s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM} \text{ et } r = \|\vec{r}\|$$

1. Quel est le sens physique de α ? Quelle est sa dimension ?
2. La molécule m_1 étant placée en O et m_2 en un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ), déterminer $\overrightarrow{E}_{1\to2}$.
3. Déterminer l'énergie potentielle U d'interaction entre les deux molécules lorsque m_2 est placée en un point de coordonnées polaires (r, θ). Pour quelle(s) valeur(s) de θ U est-elle minimale (r étant fixé).

8 Rails de Laplace

Une résistance R et un condensateur de capacité C sont montés en série constituent un circuit électrique fermé par une tige mobile MN de masse m, de résistance négligeable, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails conducteurs (R_1) et (R_2) horizontaux et parallèles, distants de h et de résistance négligeable (rails de Laplace).

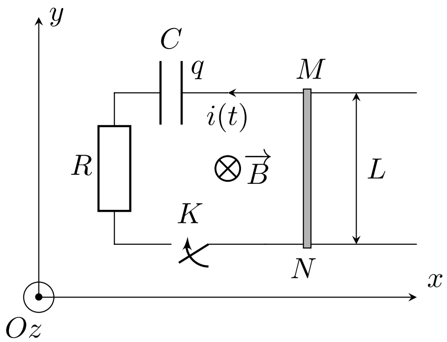

Figure 2 –

Le dispositif est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = -B\,\overrightarrow{e_z}$ $(B > 0)$ uniforme et normal au plan des rails. À l'instant $t = 0^-$, la tige étant immobile et le condensateur possédant la charge Q, on ferme l'interrupteur K.

1. Analyser qualitativement ce qui va se produire après la fermeture de l'interrupteur K.
2. Déterminer une équation électrique (E) reliant la charge $q(t)$ et ses dérivées par rapport au temps à la vitesse $v(t)$ de la tige à l'instant t.
3. Déterminer de même une équation mécanique (M) reliant la vitesse $v(t)$ et sa dérivée par rapport au temps à la charge $q(t)$ du condensateur.
4. Compte tenu des conditions initiales, déterminer :
   a) La loi d'évolution $i(t)$ du courant au cours du temps.
   b) La vitesse $v(t)$ de la tige à l'instant t ainsi que sa valeur limite lorsque $t \to +\infty$.
5. Soit U_{C0} l'énergie électrique initialement emmagasinée dans le condensateur. Au bout d'un temps infini, on note $U_{C\infty}$ l'énergie électrique stockée dans le condensateur, $E_{c\infty}$ l'énergie cinétique de la tige MN et W_J l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R. Montrer à partir des équations (E) et (M) que :

$$U_{C0} = U_{C\infty} + E_{c\infty} + W_J$$

9 Capteur de courant *

1. Écrire les équations de Maxwell dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires A.R.Q.S.
2. On considère un fil traversé par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad I_\mathrm{m} = 10\ \mathrm{A} \quad \text{et} \quad f = \omega/2\pi = 50\ \mathrm{Hz}$$

   Ce fil étant confondu avec l'axe Oz, calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ créé par le fil en tout point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z).

3. Le fil est maintenant entouré par un tore à section carrée d'arête a et de rayon interne $a/2$. On bobine sur ce tore N spires quasi-jointives, disposées régulièrement et orientées comme sur la figure 3.

   a) Expliquer pourquoi on observe un courant dans les spires du tore. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}(M,t)$ créé par le bobinage du tore en tout point M en fonction de l'intensité électrique $i_1(t)$ qui circule dans le bobinage.

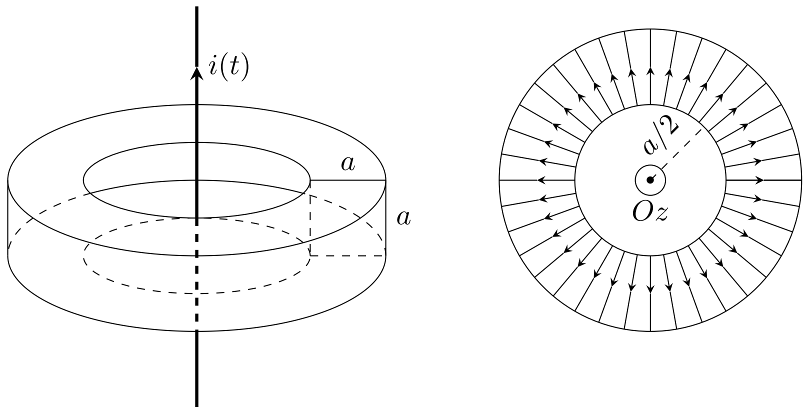

FIGURE 3 – Les flèches de la figure de droite indiquent l'orientation des spires bobinées sur le tore. En réalité ces spires sont quasi-jointives.

b) En déduire le flux magnétique total ϕ à travers les surfaces des N spires du tore.

c) La résistance électrique du bobinage est notée R. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit le courant $i_1(t)$ qui circule dans le tore.

d) On se place en régime sinusoïdal forcé et on pose $i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega t + \phi)$. On introduit les grandeurs complexes $\underline{i}(t)$ et $\underline{i}_1(t)$. Déterminer la transmittance complexe :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{i}(t)}$$

À quelle condition a-t-on $i_1(t) = K\,i(t)$ où K est une constante de proportionalité réelle indépendant de la fréquence f ? Déterminer l'expression de K.

4. Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

10 Induction électromagnétique *

Un anneau circulaire en cuivre de rayon a est soudé à deux tiges en plastique de masses négligeables. La tige bc peut coulisser sans frottements à l'intérieur d'un guide cylindrique tandis que la tige de repose sur un support horizontal plan sur lequel elle peut pivoter sans frottements.

Ce dispositif définit un axe vertical (Oz) où O est le centre de l'anneau, qui permet de le faire tourner à la vitesse angulaire : $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z}$.

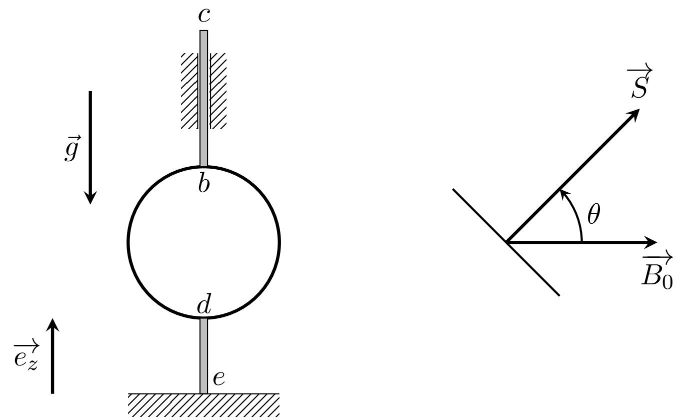

FIGURE 4 –

On plonge l'anneau dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{e_x}$ et on note R sa résistance électrique, $\overrightarrow{S}$ son vecteur surface et on néglige son inductance propre. Enfin on note J le moment d'inertie de l'anneau par rapport à l'axe (Oz).

1. Écrire une équation électrique (EE) qui régit l'intensité électrique $i(t)$ qui circule dans l'anneau. Écrire de même une équation mécanique (EM) vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$.

2. On pose $S = \|\overrightarrow{S}\|$. Montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{\theta} + \frac{S^2 B_0^2}{JR} \sin^2(\theta)\,\dot{\theta} = 0$$
3. À l'instant $t = 0$ on a $\omega(0) = \omega_0$ et on constate que la vitesse angulaire finit par s'annuler. Montrer que l'énergie cinétique initiale de l'anneau est entièrement dissipée par effet Joule.

11 Induction électromagnétique

On considère le dispositif ci-dessous. Une tige AB conductrice de masse m est posée sur deux rails conducteurs horizontaux connectés par une résistance R. On néglige la résistance électrique de la tige et des rails devant R. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0}$ orthogonal au plan des rails.

Au milieu de la tige AB est attaché un fil inextensible et sans masse, relié à son autre extrémité à une masse M, par l'intermédiaire d'une poulie (figure 5).

À l'instant $t = 0$, la tige est abandonnée sans vitesse initiale en $x = 0$. On néglige le frottement sur les rails.

1. On suppose la poulie sans masse et sans frottements. Étudier le mouvement de la tige pour $t > 0$ en donnant son abscisse $x(t)$. On négligera le champ magnétique propre de ce circuit.

2. Reprendre la question précédente si la poulie possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation (son mouvement se faisant toujours sans aucun frottement).

12 Spectromètre de masse

On s'intéresse à un spectromètre de masse, utilisé pour séparer des isotopes (voir schéma ci-dessous). Une source émettant des ions

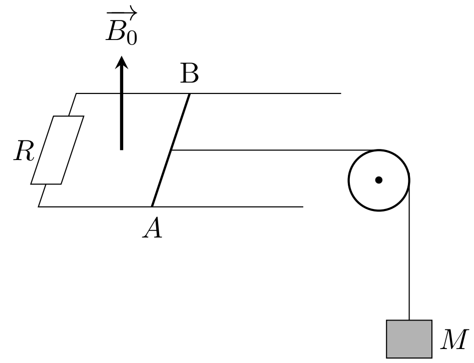

Figure 5 –

mercure ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ et ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ est placée en S. La vitesse initiale de ces ions peut être considérée comme étant nulle.

Les ions traversent ensuite la chambre d'accélération soumise à une tension U et en ressortent en O. Ils entrent alors dans la chambre de déviation où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$ uniforme (figure 6).

1. Quelle est la vitesse acquise par les isotopes en O ?
2. Que se passe-t-il ensuite ? Déterminer la distance A_1A_2 séparant les points d'impact des isotopes ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ (A_1) et ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ (A_2) sur la cible.

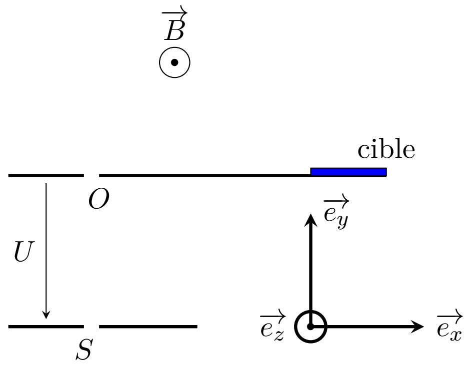

FIGURE 6 –

13 Électromagnétisme - Question de cours

Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique se propage dans un plasma contenant N électrons par unité de volume. Son champ électromagnétique s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_m}\, e^{i(\omega t - kz)} \quad \underline{\overrightarrow{B}} = \overrightarrow{B_m}\, e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{E_m} = E_m\, \overrightarrow{e_z}$$

où E_m est un réel positif.

Données :
$c = 3\times10^8$ m.s^{-1}, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C,
$m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg, $N = 10^{20}$ m^{-3}

1. À quelle condition peut-on négliger la force magnétique devant la force électrique exercée sur un électron ?

   On se placera dans ce cas pour la suite. On suppose de plus que le plasma est dilué et que le mouvement des ions est négligeable.
2. Calculer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$.
3. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à l'aide des équations de Maxwell. En déduire l'équation de dispersion.
4. a) En déduire l'existence d'une fréquence limite f_{lim} dont on donnera la valeur numérique.
   b) Quelles sont les expressions de $\overrightarrow{E}$ en notation réelle dans les deux cas : $f < f_{\text{lim}}$ et $f > f_{\text{lim}}$.
   c) Déterminer la vitesse de groupe et la vitesse de phase en fonction de ω dans le second cas.

14 Force électromagnétique dans un métal

Une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale de pulsation ω, polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{e_z}$ se propage dans le vide dans la direction $\overrightarrow{e_x}$. C'est l'onde incidente et son champ électrique complexe s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}}(x,t) = E_m\, e^{i(\omega t - kx)}\, \overrightarrow{e_z} \quad E_m > 0$$

Cette onde arrive sous incidence normale sur un conducteur ohmique de conductivité γ, deperméabilité μ_0 et de permittivité ε_0 et qui occupe le demi-espace $x > 0$.

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise dont les champs électriques s'écrivent :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}}(x,t) = \underline{r}\, E_m\, e^{i(\omega t + kx)}\, \overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{E_t}}(x,t) = \underline{t}\, E_m\, e^{i(\omega t - \underline{k}_t x)}\, \overrightarrow{e_z}$$

où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont les coefficients de réflexion et de transmission complexes.

On donne les relations de passage :

$$\overrightarrow{E}(M_2) - \overrightarrow{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, \overrightarrow{n_{12}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(M_2) - \overrightarrow{B}(M_1) = \mu_0\, \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

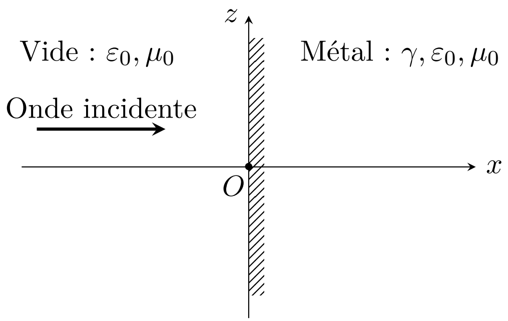

FIGURE 7 –

1. On considère que la densité volumique de charges ρ ainsi que le courant de déplacement sont nuls dans le métal.

   a) Quelle est la relation entre k et ω ?

   b) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique dans le métal. En déduire la relation entre $\underline{k}_t$ et ω. Donner la seule racine physiquement acceptable pour $\underline{k}_t$ en fonction de la grandeur :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

2. On indique que $\overrightarrow{j_S} = \vec{0}$ à la surface du métal. Montrer que :

$$\underline{r} = \frac{\alpha - 1 + i}{\alpha + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i}$$

   avec $\alpha = \dfrac{\omega\delta}{c}$.

3. On considère un volume cylindrique infini dans le métal, d'axe Ox, de section S et qui s'étend entre $x = 0$ et $x \to +\infty$.

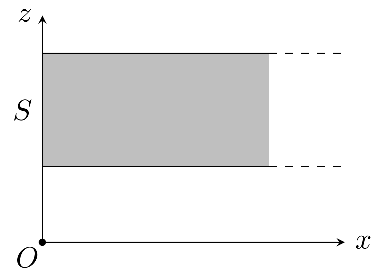

FIGURE 8 –

On indique que, dans un milieu matériel, la densité volumique de forces électromagnétiques s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{em}}} = \rho \overrightarrow{E} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$. On pourra utiliser la formule de la valeur moyenne :

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* \right]$$

4. a) Montrer que la moyenne temporelle de la densité volumique de forces électromagnétiques dans le métal, à l'abscisse x, s'écrit, :

$$\langle \overrightarrow{f_{\text{em}}} \rangle = \frac{\gamma}{\delta\omega} |\underline{t}|^2 E_m^2 \, e^{-2x/\delta} \, \overrightarrow{e_x}$$

   b) En déduire que la résultante des forces électromagnétiques exercées sur le cylindre se met sous la forme :

$$\overrightarrow{F_{\text{em}}} = P_{\text{em}} S \, \overrightarrow{e_x}$$

   où P_{em} est la pression électromagnétique.

   c) Quelle est l'expression de P_{em} dans le cas d'un métal parfait ?