Feuille 4 : Révisions Thermodynamique
Mécanique quantique

Chapitres à réviser :

- Thermodynamique MPSI et MP : Diffusion thermique.
- Mécanique quantique.

Revoir les questions de cours des thèmes Thermodynamique et mécanique quantique (disponibles sur le site de la classe)

1 Thermodynamique - CCINP

On étudie un cylindre calorifugé avec n mol de gaz parfait a l'intérieur. Ce cylindre est limité par un piston mobile. On définit $\gamma = C_P/C_V$. Dans la situation initiale le gaz est à la pression p_0 et occupe un volume V_0

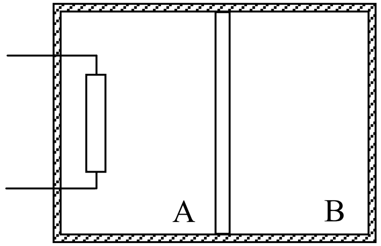
1. On étudie une transformation réversible : en appuyant très lentement sur le piston, on passe de p_0 à la pression $p_1 > p_0$. Calculer le volume final V_1 en fonction de p_0, p_1 et γ.
2. Démontrer la relation de Mayer : $C_p - C_v = nR$.
3. On revient à la situation initiale. On élève subitement la pression extérieur du piston à la valeur $p_1 > p_0$ puis on relâche brusquement le piston en maintenant cette pression extérieur constante.

   Montrer que le volume final est donné par $V_2 = \frac{V_0}{\gamma} f(p_0, p_1, \gamma)$ et donner l'expression de f.
4. On donne l'entropie :

$$S(T,p) = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S(T_0, p_0)$$

   À l'aide d'un bilan entropique, comparer les volumes V_1 et V_2. Représenter les 2 situations dans un diagramme de Clapeyron.

2 Chauffage d'un gaz - CCINP



Un cylindre à parois adiabatiques est divisé en deux compartiments A et B par un piston étanche coulissant sans frottements et de capacité thermique négligeable. Chaque compartiment contient exactement une mole d'un A gaz parfait monoatomique. Dans l'état initial (E_0) les deux compartiments sont à la même température $T_0 = 298$ K et sous la même pression $P_0 = 1{,}00$ bar.

1. Le piston est réalisé dans un matériau adiabatique. Un courant électrique circule dans la résistance chauffante placée dans le compartiment A ; cela chauffe lentement le gaz dans A et provoque une transformation réversible du gaz dans B. Dans l'état final, la pression du gaz dans le compartiment A est $P_{AF} = a\,P_0$ avec $a > 1$.

   Pour les applications numériques on prendra : $a = 1{,}20$.

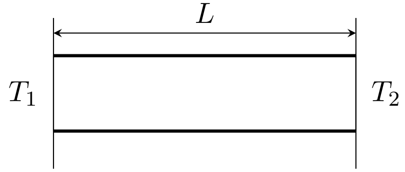
   a) Déterminer en fonction de T_0, a et P_0 la pression finale P_{BF} et la température finale T_{BF} du gaz dans le compartiment B.

   b) Déterminer les volumes V_{AF} et V_{BF} de chaque compartiment, ainsi que la température T_{AF} du gaz dans le compartiment A (toujours en fonction de T_0, a et P_0).

   c) Quelle est la chaleur Q cédée par la résistance chauffante ?
2. Reprendre toute l'étude en supposant que le piston est diathermane (on a toujours $P_{AF} = a\,P_0$ dans l'état final).

3 Diffusion thermique - Mines / Ponts

On considère un barreau cylindrique solide de masse volumique μ, capacité thermique massique c, de section S et de longueur L, en contact parfait à ses deux extrémités avec deux thermostats de températures T_1 et T_2. La face latérale du barreau est calorifugée.



Pour $t < 0$, le régime stationnaire est réalisé. À $t = 0$ on retire les deux thermostats et on isole thermiquement les deux extrémités du barreau.

1. Quelle est la répartition de température dans le barreau lorsque $t < 0$?
2. Quelle est la température finale du barreau pour $t > 0$, une fois l'équilibre thermique atteint ?
3. Calculer la variation d'entropie du barreau au cours de l'expérience.

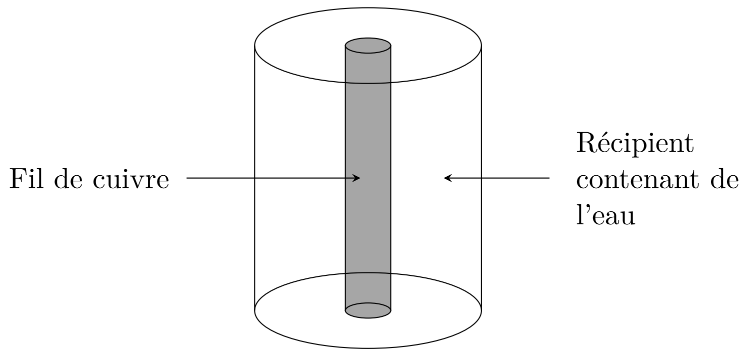
On donne l'entropie massique d'une phase condensée idéale de capacité thermique massique c à la température T :

$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0)$$

où T_0 est une température de référence, quelconque mais fixée.

4 Exercice ouvert : niveau Centrale ou Mines

On considère un récipient cylindrique de hauteur infinie et de rayon R qui contient de l'eau de conductivité thermique λ. Ce récipient est traversé en son centre par un fil de cuivre de rayon $a < R$ et de résistivité électrique ρ, parcouru par un courant constant I. Les parois latérales extérieures du récipient sont maintenues à une température constante T_0.

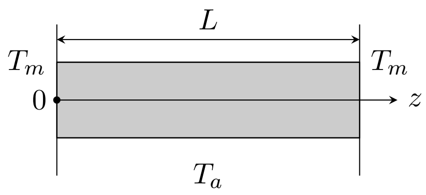


On suppose que la puissance dissipée par effet Joule dans le fil est intégralement cédée à l'eau et on se place en régime stationnaire. Établir la loi de répartition de la température $T(r)$ dans l'eau.

5 Diffusion thermique - Centrale

On considère une barre cylindrique de conductivité thermique λ, de longueur L en contact avec 2 thermostats de même température T_m à ses extrêmités. La surface latérale du cylindre est en contact avec l'air de température constante T_a. On rappelle que les transferts thermiques conducto-convectifes sont régis par la loi de Newton ; pour une surface S de contact solide - fluide on a :

$$P_{\text{th}} = h(T_s - T_f)\, S$$



On est en régime stationnaire :

1. Déterminer la température $T(z)$ dans la barre.
2. Calculer la puissance thermique P_a échangée avec l'air.

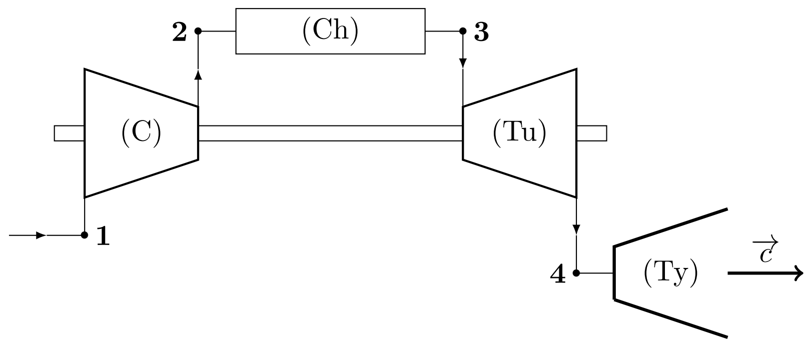
6 Diffusion thermique - Centrale

Un fusible est modélisé par un cylindre d'axe Oz, de longueur L et de rayon R, de conductivités électrique σ et thermique λ. Un courant électrique d'intensité I le parcourt, la densité de courant $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{e_z}$ est supposée uniforme dans une section et le flux thermique est radial. Les effets de bord sont négligés et le régime est stationnaire.

1. Établir l'équation aux dérivées partielles verifiée par $T(r)$ dans le fusible en fonction de λ et de σ. La température à la surface du fusible est T_0 : en déduire la répartition de température $T(r)$ et représenter celle-ci en fonction de r.
2. Soit T_f la température de fusion du fusible. À partir de quelle intensité I_c le fusible commence-t-il à fondre ?
3. De façon plus réaliste, le comportement en surface est gouverné par des phénomènes conducto-convectif. Le flux est donné par la loi de Newton $\phi_{th} = h\,(T_s - T_0)S$ où T_s est la température de surface du fusible et T_0 celle de l'air ambiant.

   On suppose que $R\,h \ll \lambda$. Déterminer la nouvelle répartition de la température dans le fusible. En déduire la nouvelle expression de I_c lorsque celui-ci commence à fondre.

7 Machine thermique - Mines / Ponts



On étudie un turbopropulseur comportant 4 pièces :

- un compresseur isentropique, calorifugé (C) ;
- une chambre de combustion isobare (Ch) ;
- une turbine isentropique, calorifugée (Tu) ;
- une tuyère isentropique, calorifugée (Ty).

La machine fonctionne en régime stationnaire. Les variations d'énergie potentielle de pesanteur sont négligées, ainsi que les variations d'énergie cinétique, sauf dans la tuyère où la vitesse des gaz en sortie est $\overrightarrow{c}$. Le compresseur et la turbine sont montés sur le même arbre : le travail utile fourni par la turbine est <u>entièrement</u> utilisé pour faire tourner le compresseur.

Le fluide dans la machine est assimilé à un gaz parfait d'exposant adiabatique $\gamma = 1{,}4$ et de capacité thermique massique $c_p = 1{,}0$ kJ.kg^{-1}.

On ne tient pas compte de l'injection de carburant dans (Ch) et du changement de composition chimique à l'issue de la combustion.

Données :

$T_1 = 20°\text{C}$; $P_1 = 1{,}0$ bar ; $\tau = \frac{P_2}{P_1} = 6$; $T_3 = 975°\text{C}$; $P_5 = 1{,}0$ bar ;

1. Déterminer T_2, P_2, w_u(C) (travail utile massique pour le compresseur), P_3, T_4, P_4 et T_5.
2. Déterminer la vitesse d'ejection des gaz en sortie de la tuyère.
3. Déterminer le rendement de cette machine, défini par :

$$r = \frac{e_c}{q_{2\to 3}}$$

où e_c est l'énergie cinétique massique des gaz éjectés par (Ty) et $q_{2\to 3}$ la chaleur massique reçue par les gaz dans la chambre de combustion.

8 Pompe à chaleur - CCINP

On souhaite chauffer l'eau d'une piscine pour passer de $T_f = 288$ K à $T_c = 298$ K à l'aide d'une pompe à chaleur (PAC). Celle-ci fonctionne en régime stationnaire et de façon réversible, le fluide circulant dans la pompe échangeant une puissance thermique P_c avec la source chaude, une puissance thermique P_f avec la source froide ; il reçoit une puissance utile P_u (puissance mécanique).

- Source chaude : piscine à la température variable T.
- Source froide : air extérieur à T_f constante.

Le volume d'eau est $V = 50$ m^3. Masse volumique de l'eau $\rho = 1$ kg/L ; capacité thermique massique $c = 4{,}2$ kJ.kg^{-1}.

1. Représenter sur un schéma les différents transferts d'énergie et donner leurs signes.
2. Déterminer la chaleur totale Q_c reçue par l'eau de la piscine au cours de toute la transformation.
3. En déduire Q_f a partir du second principe écrit entre t et $t + \mathrm{d}t$. On donne l'entropie massique d'une phase condensée idéale :

$$s(T) = c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s(T_0)$$

4. Déterminer W_u (travail utile total pour toute la transformation) à partir du premier principe. Définir l'efficacité de cette PAC et la calculer.

9 Statique des fluides - CCINP

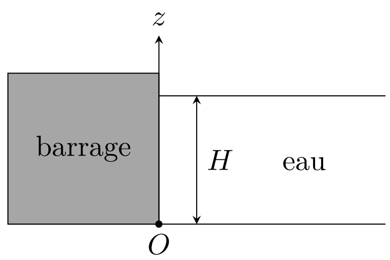
Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Soit Oz un axe vertical ascendant avec une origine O située au niveau du sol terrestre. On suppose l'accélération de la pesanteur uniforme : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$.

On considère que l'atmosphère est un gaz parfait de masse molaire M_a en équilibre. Sa température varie selon la loi $T_a(z) = T_0\,(1 - \alpha z)$ où α est une constante ($\alpha > 0$).

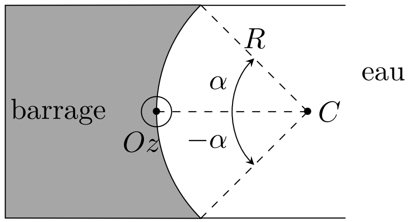
1. Donner la relation fondamentale de la statique des fluides. On suppose que la pression varie selon $P_a(z) = P_0\,(1 - \alpha z)^\beta$. Déterminer β en fonction de M_a, R, T_0, α et g.
2. En déduire la masse volumique $\rho_a(z)$ de l'atmosphère en fonction de z.

10 Barrage - CCINP

Un barrage plan est un édifice qui présente une surface verticale plane en contact avec une retenue d'eau. On suppose la masse volumique ρ de l'eau est constante et on note H la hauteur d'eau.

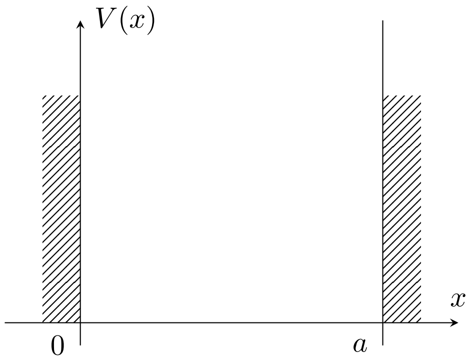


1. La pression à la surface de l'eau (en $z = H$) est la pression atmosphérique P_0. Déterminer la pression $P(z)$ dans l'eau.
2. Calculer la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur la surface solide du barrage.
3. Même question si la surface du barrage en contact avec l'eau est un morceau de cylindre de rayon R et délimité par l'angle α (cf. figure). La hauteur d'eau est toujours H.



11 Mécanique quantique - CCINP

Un électron de masse m se situe dans un puits infini de largeur a $(0 < x < a)$.

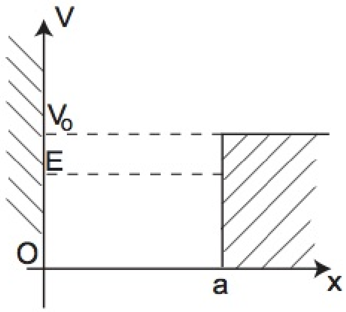


1. Résoudre l'équation de Schrödinger et déterminer les niveaux d'énergie.
2. Calculer la densité de probabilité de présence, quelle propriétés de normalisation doit-elle vérifier ? Calculer la position moyenne de l'électron.
3. On suppose maintenant qu'il y a N électrons et qu'il n'en existe que 2 par niveau d'énergie (principe d'exclusion de Pauli). Calculer l'énergie totale. On donne : pour $M \gg 1$: $\sum_{n=1}^{M} n^2 \approx M^3/3$.

12 Mécanique quantique - Mines / Ponts

Soit une particule de masse m et d'énergie E. On suppose que son énergie potentielle vérifie :

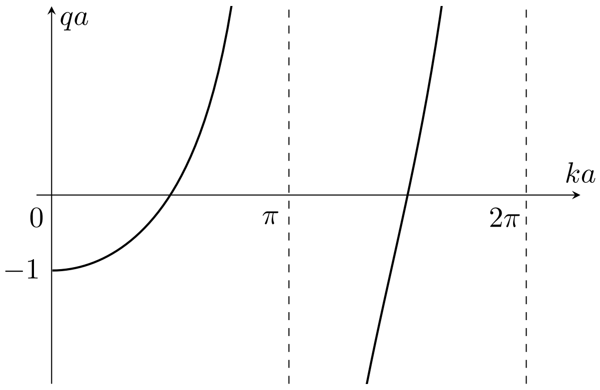
$$\begin{cases} x < 0 & : \quad V(x) = +\infty \\ 0 \leqslant x \leqslant a & : \quad V(x) = 0 \\ x > a & : \quad V(x) = V_0 \end{cases}$$



On s'intéresse aux états liés et on pose :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

1. Montrer que : $qa = -ka \text{ cotan}(ka)$.
2. Déterminer $(ka)^2 + (qa)^2$. La figure ci-dessous donne une représentation de l'application $x \longmapsto -x \text{ cotan}(x)$ sur $[0, 2\pi]$.



En raisonnant dans le plan (ka, qa), en déduire :

a) Que l'énergie est quantifiée.

b) La valeur minimale de a pour qu'une particule dans ce puit ait un état lié.

13 Particule dans une boîte à deux dimensions

Une particule de masse m est confinée dans un puit à deux dimensions, caractérisé par une énergie potentielle :

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in]0,a[\times]0,b[\\ +\infty & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

On étudie un état stationnaire d'énergie $E > 0$: $\Psi(x,y,t) = \varphi(x,y)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$.

1. Montrer que la partie spatiale φ vérifie pour tout $(x,y) \in]0,a[\times]0,b[$ l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi = E\,\varphi \qquad (1)$$

2. On cherche une solution de (1) par séparation des variables, sous la forme $\varphi(x,y) = f(x)\,g(y)$ où f et g sont deux applications à valeurs complexes. Comme φ n'est pas identiquement nulle, $\exists\, x_0 \in]0,a[,\ f(x_0) \neq 0$ et on pose :

$$C_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{f''(x_0)}{f(x_0)} \in \mathbb{C}$$

a) Montrer que, pour tout $y \in]0,b[$, l'application g vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}g''(y) = (E - C_1)\,g(y) \qquad (2)$$

Dans la suite on posera $C_2 = E - C_1$.

b) Montrer grâce aux conditions aux limites que $C_2 \neq 0$.

c) On pose $C_2 = |C_2|\,e^{i\beta}$, où $\beta = \arg C_2$. Déterminer la solution générale de (2). Montrer que les conditions aux limites imposent $\beta = 0$ et qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$C_2 = |C_2| = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 m^2}{b^2}$$

d) Montrer que pour tout $x \in]0,a[$, l'application f vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}f''(x) = C_1\,f(x) \qquad (3)$$

En déduire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$C_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{a^2}$$

3. Déterminer l'expression complète de l'énergie E.

4. L'état stationnaire peut donc s'écrire :

$$\Psi(x,y,t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$$

et on supposera qu'on peut toujours s'arranger pour que A soit une constante réelle. Déterminer l'expression de A en fonction de a et b.

14 Retour sur les forces centrales - Centrale

On étudie une masse ponctuelle m aux alentours d'un trou noir de masse M. On négligera les effets relativistes et on ajoutera en plus de l'énergie potentielle Newtonienne $E_p = -\dfrac{GmM}{r}$, une énergie potentielle de la forme $E_p' = -\alpha\dfrac{Mm}{r^3}$, α étant un paramètre réel.

1. Montrer que l'on peut écrire :

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}$$

où $U_{\text{eff}}(r)$ ne dépend que de r, de la constante des aires, des masses et de ainsi que des conditions initiales.

2. À quelle(s) condition(s) le mouvement est-il stable et circulaire ?