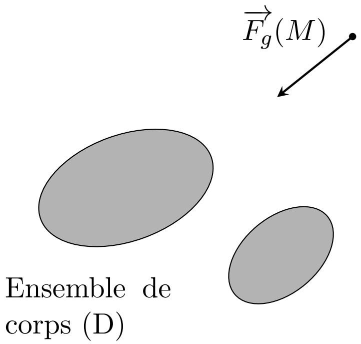
ANALOGIES ENTRE CHAMP ÉLECTRIQUE ET CHAMP DE GRAVITATION

1) Définition

La théorie du champ électrique et du potentiel électrique est complètement transposable au champ de gravitation.

Un ensemble de corps (D) exerce sur une masse ponctuelle m (masse de dimension suffisamment petite pour être assimilée à un point) placée en un point M une force gravitationnelle attractive $\overrightarrow{F_g}(M)$.



On constate de façon expérimentale que $\overrightarrow{F_g}(M)$ est proportionnelle à la masse m qui est placée en M, ce qui amène à écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g}(M) = m\,\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)}$$

Ce champ vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$ est par définition le *champ de gravitation* créé au point M par l'ensemble des corps (D).

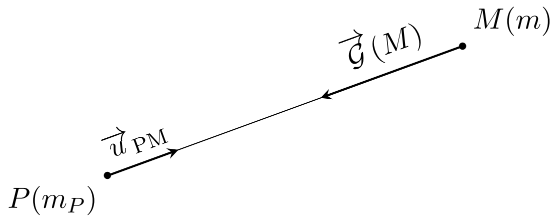
La dimension d'un champ de gravitation est donc : $[\mathcal{G}] = \mathrm{N.kg^{-1}} = \mathrm{m.s^{-2}}$.

2) Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Dans le cas particulier où l'ensemble des corps (D) est réduit à une seule masse ponctuelle m_P placée en un point P, la force gravitationnelle est donnée par la *loi de Newton*, analogue à la loi de Coulomb de l'électrostatique :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g}(M) = -\,G\,\frac{m\,m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\,\overrightarrow{u}_{PM}}$$

où G est la constante de gravitation.



On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -\,G\,\frac{m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\,\overrightarrow{u}_{PM} = -\,G m_P\,\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}}$$

Ainsi, on passe du champ de gravitation au champ électrostatique par les changements suivants :

Électrostatique	**Gravitation**
Charge ponctuelle q_p	Masse ponctuelle m_P
Champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$	Champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-\,G$

Tableau 1

Numériquement :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{ uSI} \,;\, \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \,;$$
$$G = 6{,}67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

3) Généralisation à un ensemble de corps (D) quelconques

On procède comme en électrostatique, en utilisant le principe de superposition des forces. On en déduit le principe de superposition des champs de gravitation :

Le champ de gravitation créé par un ensemble de corps est la somme des champs de gravitation créés par chacun de ces corps individuellement.

Un cas particulier important est celui où les corps (D) sont un ensemble dénombrable de N masses ponctuelles m_i placées en des points P_i :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{G}_i}(M) = \sum_{i=1}^{N} (-Gm_i)\, \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3}}$$

4) Potentiel gravitationnel

Tout comme on peut définir un potentiel électrique $V(M)$, on peut introduire un potentiel gravitationnel $\Phi_g(M)$. C'est un champ scalaire, défini en tout point M par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M\, \Phi_g(M)}$$

La dimension de Φ_g est celle de $[\mathcal{G}]\times$ m $=$ N.kg^{-1}.m $=$ m^2.s^{-2}.

- Tout comme le potentiel électrique, le potentiel gravitationnel n'est pas unique : il n'est défini qu'à une constante près. Cela permet de choisir son origine : en général, on le prend égal à zéro à l'infini lorsque la distribution de masse (D) est d'extension finie.
- $\Phi_g(M)$ est aussi continu vis à vis des coordonnées d'espace (car il est dérivable).
- Tout comme pour le potentiel électrique, le potentiel gravitationnel est lié à l'énergie potentielle d'une masse ponctuelle m placée dans un champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$:

  $$\boxed{E_P^{\text{gravit}}(M) = m\,\Phi_g(M)}$$

  Ainsi, le potentiel gravitationnel peut être défini comme étant l'énergie potentielle de gravitation d'une masse ponctuelle $m =$ 1 kg plongée dans un champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.
- Enfin, les expressions de $\Phi_g(M)$ se déduisent de celles du potentiel électrique $V(M)$ au moyen des transformations du tableau 1. Pour des distributions de masse (D) de la forme :

  Masse ponctuelle m_P placée en P :

  $$\boxed{\Phi_g(M) = -G\frac{m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|}}$$

  Ensemble discret de masses ponctuelles m_i placées en P_i :

  $$\boxed{\Phi_g(M) = -G\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\|\overrightarrow{P_iM}\|}}$$

5) Théorème de Gauss gravitationnel

Le théorème de Gauss peut être appliqué à la gravitation. En faisant les analogies $q \leftrightarrow m$ et $1/(4\pi\varepsilon_0) \leftrightarrow -G$, on aboutit à :

$$\boxed{\text{Pour toute surface fermée } S_F, \;\; \Phi(\overrightarrow{\mathcal{G}}/S_F) = -\,4\pi\, G\, M_{\text{int}}}$$

où M_{int} est la masse intérieure à S_F.

Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée quelconque est égal à $-\,4\pi\, G$ fois la masse intérieure à cette surface.

Enfin, le champ de gravitation possède les mêmes symétries et invariances que le champ électrique.

6) Équations locales de la gravitation

Elles se déduisent de la théorie de l'électrostatique :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{G}(M) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \text{div}\,\overrightarrow{G}(M) = -\,4\pi\, G\, \mu(M)}$$

où $\mu(M)$ est la *masse volumique* au point M, grandeur analogue à la charge volumique $\rho(M)$ rencontrée en électrostatique.

De plus, en utilisant $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_g(M)$, on en déduit que le potentiel gravitationnel vérifie une équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta\Phi_g(M) = 4\pi\, G\, \mu(M)}$$