Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^{-1}

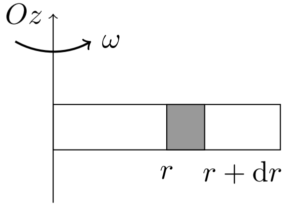
1 Équilibre de l'atmosphère

On considère l'atmosphère assimilé à un gaz parfait de masse molaire M, en équilibre dans le champ de pesanteur g supposé uniforme. On suppose que la pression P ne dépend que de l'altitude z et on note P_0 la pression en $z = 0$.

1. On suppose que $T(z) = T_0 - az$ (a constante > 0). Montrer que dans ce cas :
$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^q$$
et donner l'expression de l'exposant q en fonction de M, g, R et a.
2. On suppose maintenant que $P(z)$ et $\rho(z)$ sont liés par $P(z)/[\rho(z)]^\gamma = \text{Cste}$ où γ est l'exposant adiabatique du gaz. C'est le modèle de l'atmosphère "adiabatique". Montrer qu'il s'agit d'un cas particulier de la question précédente et déterminer l'exposant q associé en fonction de γ. En déduire que la température vérifie une loi de la forme :
$$T(z) = T_0 - az$$
et déterminer l'expression du coefficient a en fonction de γ, M, g et R. En déduire aussi que :
$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{Mgz}{RT_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

2 Centrifugeuse

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon R et de longueur L, tournant autour d'un axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante ω. Un gaz supposé parfait est injecté dans le cylindre. Nous allons étudier la répartition des molécules de gaz dans le cylindre en fonction de la distance r à l'axe Oz lorsque ce gaz est en équilibre relatif dans le cylindre.



1. On considère que les molécules sont de masse m et thermostatées à la température T. On note $P(r)$ la pression, $n^*(r)$ la densité particulaire et $\rho(r)$ la masse volumique du gaz à la distance r de Oz.

   Faire un bilan des forces appliquée à une tranche de gaz comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$, dans le référentiel lié au cylindre. On exprimera la résultante des forces de pression sous la forme d'une dérivée de $P(r)$.
2. Déduire de la condition d'équilibre relatif de la tranche de fluide la densité $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation.
3. Montrer que $n^*(r)$ est proportionnel à un facteur de Boltzman faisant intervenir l'énergie potentielle associés à la force d'intertie d'entraînement.

3 Loi de Curie

1. Expliquer qualitativement ce qu'on entend par basse et haute température pour une particule à deux niveaux d'énergie $-\varepsilon$ et ε.

Dans la question suivante on prendra comme critère $x \ll y \Longleftrightarrow x \leqslant y/10$.

2. On considère $N \gg 1$ atomes d'argent, tous dans leur état fondamental dont on prendra l'énergie égale à 0 ($E_{\text{fond}} = 0$). Ces atomes possèdent un moment magnétique permanent $\overrightarrow{m}$ dont la composante m_z sur Oz ne peut prendre que deux valeurs : $\pm\, m$ avec $m = 1{,}0.10^{-23}$ A.m^2.

   Placés dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$, il acquièrent une énergie magnétique dont l'expression est : $-\,\overrightarrow{m}.\overrightarrow{B}$.

   On suppose $B = 1$ T. Déterminer deux températures caractéristiques T_b et T_h telle que :
   - Si $T \leqslant T_b$ on est dans l'approximation basse température.
   - Si $T \geqslant T_h$ on est dans l'approximation haute température.

   Donner les valeurs numériques de T_b et T_h et conclure.
3. On définit le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ d'une assemblée de N atomes d'argent comme la somme des moments magnétiques individuels $\overrightarrow{m_i}$ des différents atomes qui la constitue. Calculer la valeur moyenne $< \mathcal{M}_z >$ de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ pour une température T.

   Selon la loi de Curie, établie expérimentalement, $< \mathcal{M}_z >$ est de la forme :
   $$< \mathcal{M}_z > = \frac{\alpha}{T}\,B$$
   où α est une constante et B la composante du champ magnétique sur Oz. Compte-tenu de l'étude précédente, montrer que l'on retrouve la loi de Curie et déterminer la constante α.

4 Système à trois niveaux

On considère un système en équilibre avec un thermostat à la température T. Les $N \gg 1$ atomes qui le constituent peuvent occuper trois niveaux d'énergie, $\varepsilon_1 = -\,\varepsilon$, $\varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

1. Calculer les nombres moyens $< N_i >$ ($i = 1{,}2{,}3$) d'atomes dans les trois états. Commenter les limites basse et haute température.
2. Calculer l'énergie moyenne $< \varepsilon >$ d'un atome. Tracer son évolution en fonction de la température et commenter le résultat.
3. Décrire qualitativement l'évolution de la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$.

5 Capacité thermique des solides

Afin de pouvoir calculer la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle suivant (modèle d'Einstein, 1907).

Dans le cas unidimensionnel, les atomes sont alignés selon un axe Ox et effectuent de petits mouvement de vibration autour de leurs positions d'équilibre respectives. Chaque atome se comporte comme un oscillateur hamonique de pulsation propre ω.

En théorie quantique, l'énergie d'un oscillateur hamonique est quantifiée et les différents niveaux d'énergie ont pour expression :

$$\varepsilon_k = \hbar\omega\left(k + \frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{N}$$

Ici, k peut prendre toute valeur dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que l'énergie moyenne d'un atome est :
   $$< \varepsilon > = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\beta\hbar\omega\right) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$
   où coth est la cotangente hyperbolique.
2. Évaluer la capacité thermique molaire $C_{V,m}(T)$ du solide.
3. Quelle est la limite de $C_{V,m}(T)$ à haute température ? Quelle loi retrouve-t-on ?
4. Quelle est la limite de $C_{V,m}(T)$ à basse température ? Commenter.

5. Tracer l'allure de $C_{V,m}(T)$ en fonction de T.

* * * * * * *

Dans les exercices suivants on considèrera la statistique classique de Boltzmann. La probabilité de trouver une particule assimilée à un point matériel de masse m dans un élément de volume $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$ de l'espace des phases repéré par le point $P(x,y,z,v_x,v_y,v_z)$ est donnée par :

$$\delta\mathcal{P} = C\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon_p(x,y,z)}{k_BT}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z$$

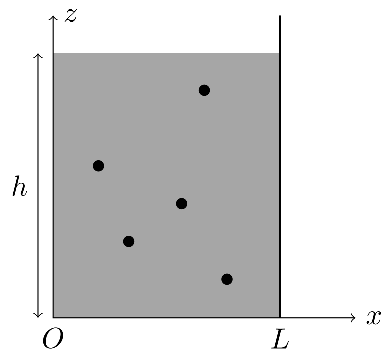
où ε_p est l'énergie potentielle de la particule et C une constante.

Formulaire : pour $\alpha > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u^3\,e^{-\alpha u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\alpha^2}$$

6 Expérience de Jean-Perrin - Mesure de k_B et $\mathcal{N}_A$

Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, Jean Perrin a mesuré le nombre d'Avogadro en introduisant des sphérules (toutes petites sphères) de caoutchouc végétal dans une cuve remplie d'eau maintenue à une température constante T. La cuve est un parallélépipède de base carrée (longueur L selon Ox et Oy) et de hauteur $h = 50$ cm selon Oz. On note N le nombre total de sphérules introduites et on suppose que $N \gg 1$.



Données : rayon d'une sphérule $r = 0{,}212\ \mu$m ; masse volumique des sphérules : $\rho = 1{,}1942$ g.cm^{-3} ; masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1{,}003$ g.cm^{-3} ; $T = 293$ K. On prendra $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

1. a) Chaque sphérule est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède qu'elle subit de la part de l'eau. Exprimer l'énergie potentielle totale d'une sphérule $\varepsilon_p(z)$ en fonction de son altitude z au dessus du fond de la cuve.
   b) Application numérique : calculer $\varepsilon_p(h)$, énergie potentielle au sommet de la cuve.
2. On suppose que les sphérules obéissent à la statistique classique de Boltzmann. Calculer la constante C de normalisation. Compte-tenu de la valeur numérique obtenue à la question 1.b), simplifier l'expression de C.
3. Calculer la probabilité $\delta\mathcal{P}(z)$ pour qu'une sphérule soit située dans une tranche de la cuve délimitée par les altitudes z et $z+\mathrm{d}z$, **quelle que soit sa vitesse**. En déduire le nombre moyen $\delta N(z)$ de sphérules située entre z et $z+\mathrm{d}z$, en fonction de k_B, T, r, ρ, ρ_{eau}, g, z et $\mathrm{d}z$
4. J.Perrin a divisé la cuve en tranches de très petite épaisseur e, situées à différentes altitudes z_i et qu'il a observé au microscope en prenant des photos de chaque tranche. Il a pu en déduire le

nombre moyen de sphérules dans chaque tranche. Ses résultats sont donnés ci-dessous :

z_i (en μm)	5	35	65	95
N_i	100	47	23	12

Déduire de ces mesures une estimation de la valeur de la constante de Boltzmann, puis du nombre d'Avogadro.

7 Fuite de gaz (*)

On étudie un gaz parfait monoatomique formé d'atomes assimilés à des points matériels de masse m. Le gaz est thermostaté à la température T et il est enfermé dans un récipeint de volume V.

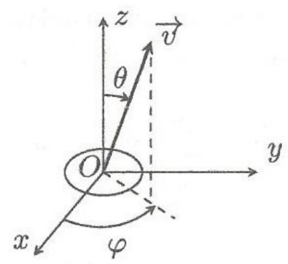
Dans cet exercice, l'énergie potentielle d'un atome sera supposée nulle : $\varepsilon_p = 0$. On note v la norme de la vitesse.

1. Déterminer la constante C qui intervient dans la probabilité.
2. Déterminer la valeur moyenne $< v^2 >$ en fonction de k_B, T et m.

   Application numérique pour l'hélium gazeux à 25°C avec M(He) = 4 g.mol^{-1}. Calculer la vitesse quadratique moyenne $v_{qm} = \sqrt{< v^2 >}$.

3. L'une des parois du récipient est percée d'un petit trou circulaire de centre O et de diamètre d suffisamment petit pour ne pas perturber l'équilibre du gaz. On suppose que les atomes ne peuvent que sortir du récipient (aucun atome ne peut y entrer). On note $N(t)$ le nombre d'atomes dans le récipient à l'instant t.

   a) Dans quel volume dV sont situés les atomes qui traversent le trou entre t et $t+\mathrm{d}t$ avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ de norme v et dont l'orientation est donnée par les angles θ et φ indiqués sur la figure ?



   b) Quel est alors le nombre moyen $\delta\overline{N}_{\overrightarrow{v}}$ d'atomes qui sont situés dans ce volume, avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$?

   c) En déduire le nombre moyen d'atomes $\delta\overline{N}$ qui traversent le trou entre t et $t+\mathrm{d}t$ pour toutes les valeurs possibles de θ, φ et v. On écrira le résultat sous la forme d'une intégrale que l'on calculera.

   d) Quelle est la relation entre $N(t)$, $N(t+\mathrm{d}t)$ et $\delta\overline{N}$? En déduire une équation différentielle satifaite par $N(t)$. En donner la solution et introduire un temps caractéristique τ pour cette fuite de gaz.

   e) Calculer en fonction de τ la durée Δt au bout de laquelle la pression $P(t)$ dans le récipient est divisée par 2. Proposer une application numérique pour un trou de dimension typique $d = 0{,}1$ mm