

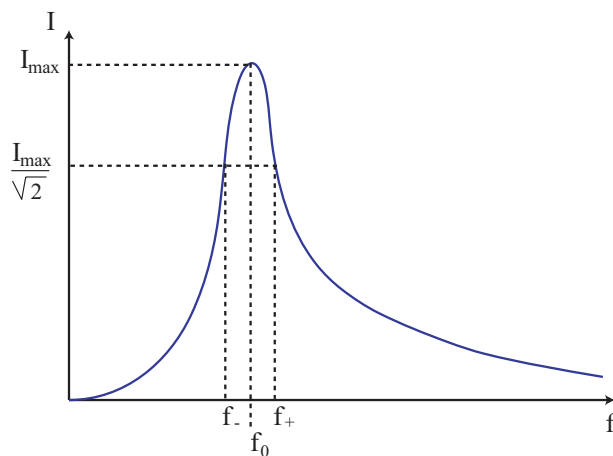
DM n°1

Pour le mardi 14 septembre 2021

1 Identification des paramètres d'un circuit RLC série à partir d'une courbe de résonance

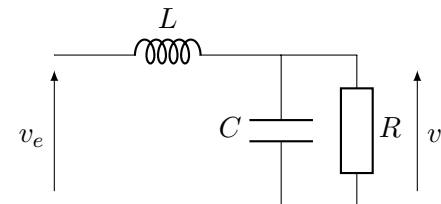
L'étude expérimentale de la résonance en intensité d'un circuit RLC série en régime forcé avec un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude $E = 10V$ et de fréquence variable f a permis d'obtenir la courbe ci dessous, où I est l'amplitude de l'intensité électrique qui traverse le circuit. Déterminer les paramètres R , L et C à partir de l'étude de cette courbe.

On donne : $I_{max} = 100 \text{ mA}$, $f_0 = 500 \text{ Hz}$, $\Delta f = f_+ - f_- = 200 \text{ Hz}$.



2 Modulation et démodulation

On considère le filtre représenté ci-dessous :



La tension d'entrée est fournie par un générateur et v_e s'écrit $v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$ où V_{em} est la valeur maximale et ω la pulsation de la tension d'entrée. La tension de sortie sera notée $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$. L'étude mathématique du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe $\underline{v}_e$ et $\underline{v}_s$ pour ces deux tensions :

$$\underline{v}_e(t) = V_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

(avec $j^2 = -1$).

III.A - Analyse qualitative

- Représenter le circuit en basse fréquence en indiquant le comportement des différents composants en basse fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de v_s en basse fréquence.
- Représenter de même le circuit en haute fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de v_s en haute fréquence.
- Quelle est la nature du filtre ?

III.B - Analyse quantitative

III.B.1) Montrer que la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{v}_s / \underline{v}_e$ s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\lambda \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On précisera les expressions de H_0 , λ et ω_0 en fonction de R , L et C . Vérifier la concordance des résultats du III.A avec cette expression de $\underline{H}$.

III.B.2)

- Comment s'exprime l'amplitude V_{sm} du signal de sortie v_s en fonction de $|\underline{H}|$ et de l'amplitude V_{em} du signal d'entrée v_e ? Quelles grandeurs électriques faut-il donc relever expérimentalement pour déterminer $|\underline{H}|$? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser ?
- Comment s'exprime la phase φ_s du signal de sortie v_s en fonction de la phase φ de $\underline{H}$ et de la phase du signal d'entrée φ_e ? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser pour mesurer φ ?

III.B.3) Diagramme de Bode

Dans toute la suite du problème, les valeurs de R , L et C sont ajustées pour que $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Montrer que $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$.
- Tracer le diagramme de Bode en gain du filtre directement sur votre feuille en précisant les grandeurs portées sur les axes ainsi que les valeurs remarquables de ces grandeurs. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence ainsi que la pulsation de coupure à -3 dB.
- Tracer le diagramme de Bode en phase du filtre. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence. Que vaut la phase φ de $\underline{H}$ pour $\omega = \omega_0$?

Partie IV - Modulation et démodulation d'amplitude – Application du filtre

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

IV.A - De la nécessité de moduler...

On s'intéresse aux signaux hertziens audio qui s'étalent sur la plage de fréquence $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}$. Cette plage est parfaitement audible à notre oreille qui peut percevoir ordinairement des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

D'autre part, on peut montrer que la réception d'une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la dimension caractéristique est une demi longueur d'onde.

Quelle devrait être la taille d'une antenne permettant la réception des signaux audio considérés ? Cela vous semble-t-il réalisable ? Pourquoi est-il alors intéressant d'utiliser une autre fréquence ? Commenter l'intérêt de l'utilisation d'une autre fréquence si l'on veut émettre plusieurs ondes radios émanant de plusieurs stations.

IV.B - Modulation

Le signal audio à transporter est maintenant appelé signal modulant. Les méthodes de modulation sont élaborées à partir d'une onde sinusoïdale pure, appelée porteuse ou signal porteur. Le résultat de la combinaison de ces deux signaux s'appelle signal modulé. Le signal modulant est noté $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ et le signal porteur $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$ où f_{port} est la fréquence du signal porteur (ou porteuse) et $f_m (\ll f_{\text{port}})$ la fréquence du signal modulant. Le signal modulé en amplitude est un signal de la forme :

$$s(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t) \text{ où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

Ce signal modulé a été obtenu en réalisant les opérations représentées dans le schéma bloc de la figure 5.

IV.B.1) Montrer que le schéma de la figure 5 permet effectivement d'obtenir le signal $s(t)$ si l'on pose $m = k A_m$. Dans toute la suite du sujet, on prendra l'indice de modulation $m < 1$. On rappelle que le spectre d'un signal désigne la représentation de l'amplitude des signaux sinusoïdaux qu'il contient en fonction de leur fréquence respective. Exemple : le spectre de

$$v(t) = X_{1m} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + X_{2m} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \text{ avec } X_{1m} > X_{2m} \text{ et } f_1 < f_2$$

est donné figure 6.

IV.B.2) On a réalisé en laboratoire l'enregistrement d'un signal modulé. Le résultat est donné figure 7 en annexe. Expliquer en quoi ce signal représente correctement un signal modulé $s(t)$ dans le cas où $m < 1$. On précisera sur la figure 7 (à rendre avec la copie) les valeurs des fréquences f_{port} et f_m , les expressions et valeurs particulières de $s(t)$ marquées d'un point d'interrogation et on déterminera la valeur de m .

IV.B.3) Réécrire le signal $s(t)$ en le linéarisant (c'est-à-dire en le mettant sous la forme d'une somme de cosinus). Quelles fréquences contient ce signal ? Représenter l'allure du spectre de $s(t)$.

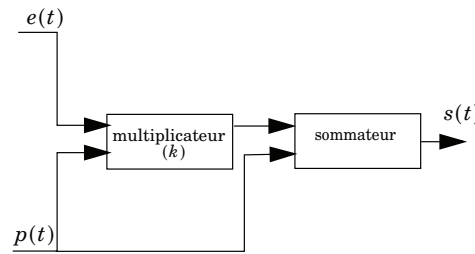


Figure 5

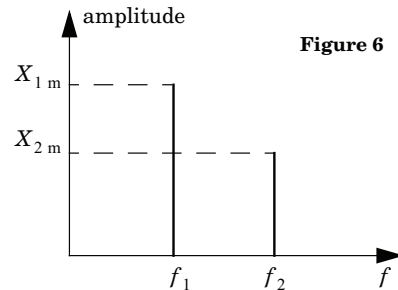


Figure 6

IV.B.4) On envoie dans la pratique un signal modulant audio, somme de signaux sinusoïdaux qui encombre la plage de fréquence

$$f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}.$$

La porteuse utilisée est celle émise par la station Europe 1 soit $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$. Le spectre du signal audio modulant est représenté figure 8.

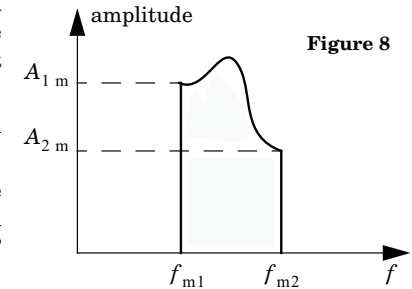


Figure 8

a) Représenter le spectre du signal modulé $s(t)$.

b) Quelle est la bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal $s(t)$ au niveau d'une antenne ? Quelle est la nature de ce filtre ?

c) Compte tenu de la Partie IV.A, montrer l'intérêt de la modulation ainsi réalisée.

IV.C - Démodulation synchrone

On considère à nouveau un signal modulé noté

$$s(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t).$$

On admet que l'on dispose à la réception du signal modulé d'un oscillateur local synchronisant le signal $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$ identique au signal porteur utilisé à l'émission. La figure 9 ci-dessous représente le principe de fonctionnement du circuit de démodulation situé après l'antenne réceptrice.

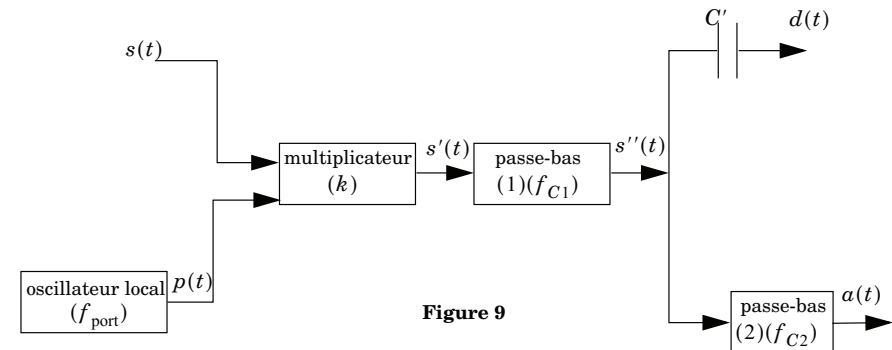


Figure 9

IV.C.1) Donner l'expression du signal $s'(t)$ obtenu à la sortie du multiplicateur. Le linéariser et représenter le spectre de ce signal.

IV.C.2) Le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure f_{C1} telle que $f_m < f_{C1} < f_{\text{port}}$ et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure $f_{C2} < f_m$. On considérera dans un premier temps que les filtres sont parfaits. C'est-à-dire que chaque filtre admet un gain $|H| = 1$ pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure et un gain nul pour toute fréquence supérieure à sa fréquence de coupure.

a) Exprimer le signal $s''(t)$ et donner son spectre.

b) On souhaite, uniquement pour cette question, utiliser le filtre étudié dans la Partie III pour réaliser le filtre (1). Le cahier des charges impose une atténuation de 80 dB pour les signaux de fréquences $2f_{\text{port}}$ par rapport aux signaux continus.

Justifier cette contrainte et calculer ω_0 et R lorsque $C = 1,00 \text{ nF}$ et $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$.

c) À quoi sert le condensateur de capacité C' représenté sur le schéma bloc ? Donner alors l'expression du signal $d(t)$ et son spectre.

d) Exprimer le signal $a(t)$ obtenu à la sortie du filtre (2).

e) Montrer finalement que l'analyse des signaux $a(t)$ et $d(t)$ permet de reconstituer le signal modulant $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$.

••• FIN •••
