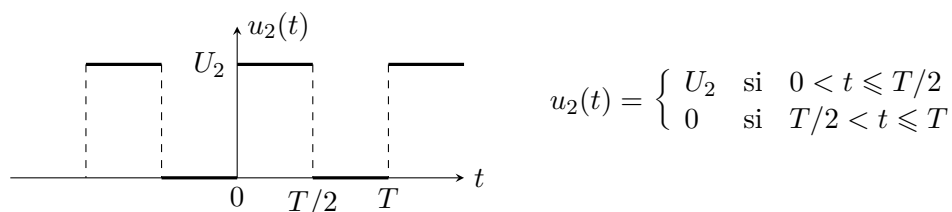


Corrigé du DS n°1 CCINP - e3a

1 DIVERS ASPECTS DU FILTRAGE D'UNE TENSION PÉRIODIQUE

A – Étude préliminaire

On dispose d'un générateur BF (basse fréquence) ; on utilisera ainsi deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de période T et de fréquence $f = 1/T$, définies comme suit : $u_1(t) = U_1 \sin(2\pi ft)$ avec $U_1 = 2 \text{ V}$ et :



avec $U_2 = 2 \text{ V}$.

On montre que $u_2(t)$ est décomposable en série de Fourier selon :

$$u_2(t) = \frac{U_2}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2U_2}{\pi(2p+1)} \sin[(2p+1)2\pi ft]$$

A1) Par définition :

$$\langle u_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t) dt = \frac{U_1}{2\pi fT} [\cos(2\pi ft)]_0^T = 0$$

puisque $fT = 1$ et par périodicité du cosinus. D'autre part :

$$\langle u_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_2(t) dt = \frac{U_2}{2}$$

A2) La valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ est définie par :

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

On a donc :

$$U_{1,\text{eff}}^2 = \frac{U_1^2}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi ft) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\pi ft)] dt = \frac{U_1^2}{2}$$

d'où :

$$U_{1,\text{eff}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}$$

De même :

$$U_{2,\text{eff}}^2 = \frac{U_2^2}{T} \int_0^{T/2} dt = \frac{U_2^2}{2}$$

et donc :

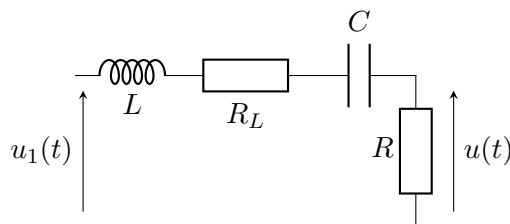
$$U_{2,\text{eff}} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}$$

A.N. $U_{1,\text{eff}} = U_{2,\text{eff}} = 1,4 \text{ V}$

B – Étude d'un filtre en régime sinusoïdal forcé

On se propose de réaliser un filtre simple permettant d'isoler les diverses composantes sinusoïdales d'une tension périodique comme vérification expérimentale du théorème de Fourier.

Un dipôle est constitué par une bobine (inductance L et résistance interne R_L en série), un condensateur de capacité C et une résistance R en série. Il est alimenté par la tension sinusoïdale $u_1(t)$.



On étudie en régime sinusoïdal forcé la réponse $u(t)$, d'amplitude U_m , entre les bornes de la résistance R . On posera :

$$LC\omega_0^2 = 1 ; R' = R + R_L ; Q = \frac{L\omega_0}{R'}$$

B1) Par un théorème pont diviseur de tension on aboutit à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + R_L + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec :

$$H_0 = \frac{R}{R'} ; Q = \frac{L\omega_0}{R'} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

B2) On remarque que :

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

G est maximal lorsque le dénominateur est minimal, ce qui se produit pour :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \omega_0}$$

On a alors :

$$\boxed{G_{\max} = H_0 = \frac{R}{R'}}$$

A.N. : $\omega_0 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$.

B3) Il faut se souvenir de la manière de calculer une incertitude. Ici c'est l'incertitude relative qui se calcule facilement (cela tombe bien puisque cette incertitude relative est aussi la précision) :

$$\boxed{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = \frac{\Delta C}{2C} = 2,5\%}$$

B4) C'est un calcul classique de cours qu'on ne reproduira pas ici. On trouve :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour atténuer au mieux un signal de pulsation $2\omega_0$, il faut que celui-ci soit en dehors de la bande passante, c'est à dire que $2\omega_0 > \omega_{c2}$ où ω_{c2} est la pulsation de coupure haute. On a donc :

$$\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} < 2\omega_0$$

ce qui s'écrit :

$$\sqrt{1 + 4Q^2} < 4Q - 1 \quad \text{d'où} \quad 1 + 4Q^2 < (4Q - 1)^2 = 16Q^2 - 8Q + 1$$

Cette inégalité se simplifie en :

$$Q > \frac{2}{3} \quad \text{soit} \quad R' < \frac{3L\omega_0}{2} = 950 \, \Omega$$

On en déduit qu'il faut choisir une résistance R vérifiant :

$$R < 918 \approx 920 \, \Omega$$

et même bien inférieure à cette valeur critique.

B5) On remarque que le choix de R est en adéquation avec la condition précédente. On calcule :

$$Q = 12 ; \quad \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 8,2 \cdot 10^{-2}$$

De plus, en posant $x = \omega/\omega_0$ on obtient :

- Pour $x = 1,1$: $G/G_{\max} = 0,40$;
- Pour $x = 1,5$: $G/G_{\max} = 9,8 \cdot 10^{-2}$;
- Pour $x = 2$: $G/G_{\max} = 5,5 \cdot 10^{-2}$

Nous avons donc affaire à un filtre passe-bande très sélectif.

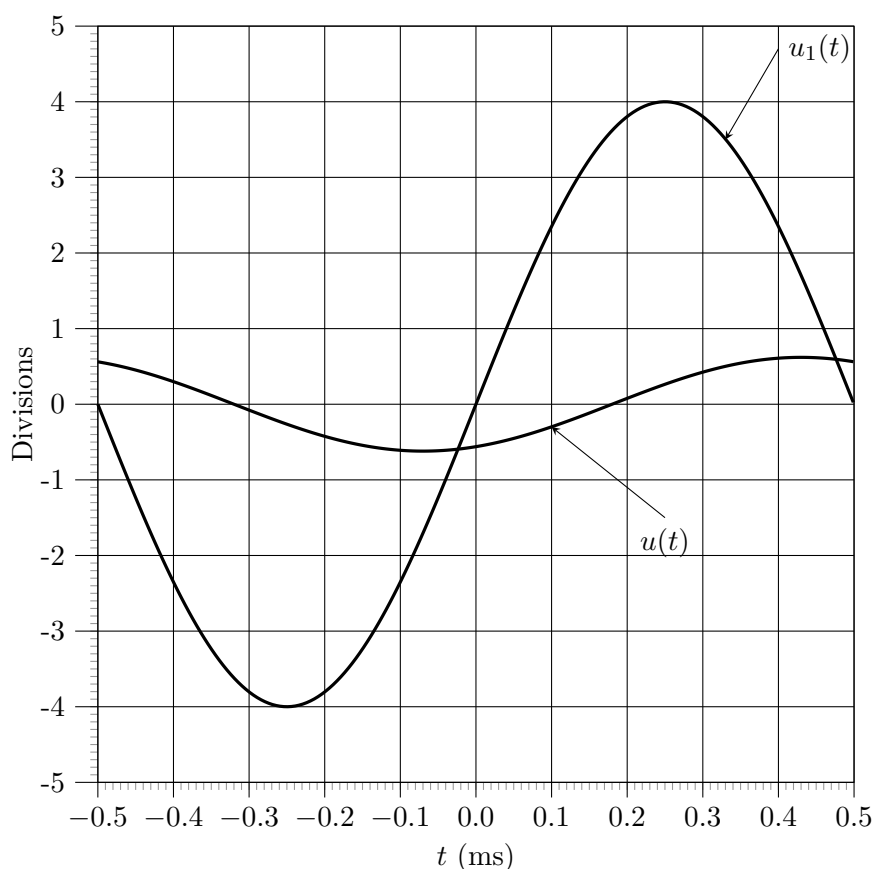
B6) On aura donc $G = 0,15$ et $\varphi = \arg \underline{H} = -\arctan [Q(1,1 - 1/1,1)] = -1,16 \text{ rad}$.

Ce déphasage négatif correspond à un *retard temporel* :

$$\tau = \frac{|\varphi|}{2\pi f} = 0,18 \text{ ms}$$

La tension $u(t)$ sera donc de la forme :

$$u(t) = 2 \times 0,15 \sin[2\pi f(t - \tau)] = 0,31 \sin[2\pi f(t - \tau)]$$



C – Séparation des composantes de Fourier de $u_2(t)$

On utilise le filtre étudié dans la partie B avec $L = 100 \text{ mH}$; $R_L = 32 \Omega$; $R = 20 \Omega$ et C ajustable. Ce filtre est alimenté avec la tension $u_2(t)$ réglée sur la fréquence $f = 1,0 \text{ kHz}$.

C1) D'après le développement en série de Fourier de $u_2(t)$, seules les *multiples impaires* de f sont présentes dans le spectre. Les quatre premières harmoniques auront donc pour pulsations :

$$\omega_1 = \omega ; \omega_2 = 3\omega ; \omega_3 = 5\omega ; \omega_4 = 7\omega$$

Les amplitudes de ces quatre premières harmoniques sont :

$$E_1 = \frac{2U_2}{\pi} ; E_2 = \frac{2U_2}{3\pi} ; E_3 = \frac{2U_2}{5\pi} \text{ et } E_4 = \frac{2U_2}{7\pi}$$

C2) Si on suppose que le filtre passe-bande est bien sélectif, il faut réaliser la condition $\omega_0 = \omega (= \omega_1)$ et espérer que les pulsations ω_2 , ω_3 et ω_4 seront situées bien en dehors de la bande passante. La tension $u(t)$ sera alors presque égale à :

$$u(t) = G(\omega) \frac{2U_2}{\pi} \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

avec $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)$. Comme $\omega = \omega_0$: $G(\omega) = H_0$ et $\varphi(\omega) = 0$. On aura donc :

$$u(t) = H_0 \frac{2U_2}{\pi} \sin(\omega t) \quad \text{donc} \quad A_1 = H_0 \frac{2U_2}{\pi} = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{\pi}$$

A.N. : $A_1 = 0,49 \text{ V}$

La valeur C_1 de C à choisir sera donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{LC_1}} = \omega \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_1 = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = 253 \text{ nF}}$$

C3) Comme $\omega_2 = 3\omega = 3\omega_0$, on aura :

$$A_2 = G(\omega_2)E_2 = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}} \frac{2U_2}{3\pi}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}} \stackrel{\text{AN}}{=} 1,0 \cdot 10^{-2}}$$

On peut donc dire que A_2 est négligeable devant A_1 . À fortiori il en sera de même des autres amplitudes A_3 et A_4 (et de toutes les suivantes) puisque ces amplitudes décroissent et que le gain G décroît lui aussi et tend vers 0 lorsque la pulsation augmente.

C4) Pour observer la manifestation de l'harmonique de pulsation $(2p+1)\omega$ il faut réaliser :

$$\omega_0 = (2p+1)\omega \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \frac{1}{(2p+1)^2 L \omega^2} = \frac{C_1}{(2p+1)^2}}$$

On aura donc :

$$\boxed{C_2 = \frac{C_1}{9} = 28 \text{ nF} ; C_3 = \frac{C_1}{25} = 10 \text{ nF} \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{C_1}{49} = 5,2 \text{ nF}}$$

Pour chacun de ces C_k , les amplitudes associées (notées B) seront :

$$B_k = H_0 E_k$$

d'où :

$$\boxed{B_2 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{3\pi} = 0,16 \text{ V} ; B_3 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{5\pi} = 98 \text{ mV} \quad \text{et} \quad B_4 = \frac{R}{R'} \frac{2U_2}{7\pi} = 70 \text{ mV}}$$

2 CIRCUITS RC COUPLÉS PAR UNE INDUCTANCE

- 1) Comme K_2 est ouvert, l'intensité traversant la bobine est nulle à tout instant. Les deux condensateurs sont donc traversés par la même intensité :

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \implies q_1(t) = q_2(t) + A$$

où A est une constante. Par continuité de la charge aux bornes d'un condensateur : $q_1(0^+) = q_2(0^+) = 0$, ce qui entraîne $A = 0$. Finalement à tout instant t , nous avons donc $q_1(t) = q_2(t)$.

Cela est donc vrai en particulier lorsque $t \rightarrow +\infty$. Notons alors $Q = Q_1 = Q_2$ les charges sur les condensateur dans cette limite. L'intensité traversant les deux résistors étant nulle, une loi des mailles conduit à :

$$E = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} = \frac{2Q}{C} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = \frac{CE}{2}}$$

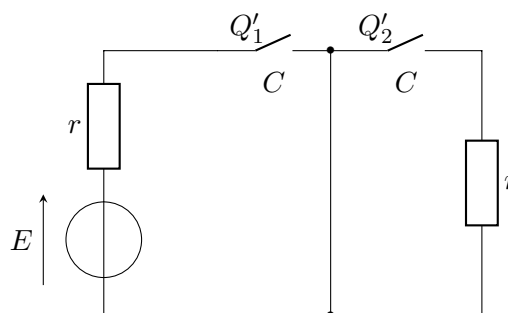
2) On a alors :

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{C} = \frac{CE^2}{4}$$

A.N. : $W = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$.

3) Le régime permanent étant atteint (K_1 restant fermé), on ferme maintenant K_2 et on prend cette date comme nouvelle origine des temps.

a) En régime permanent les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts et la bobine comme un fil. Notons Q'_1 et Q'_2 les charges sur chaque condensateur. On aura donc :



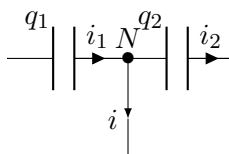
b) Les intensités dans les deux mailles sont nulles. Deux lois des mailles conduisent alors à :

$$Q'_1 = CE \text{ et } Q'_2 = 0$$

et

$$W' = \frac{(Q'_1)^2}{2C} + \frac{(Q'_2)^2}{2C} = \frac{CE^2}{2}$$

c) Selon la loi des nœuds en N nous avons : $i = i_1 - i_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$.



La loi des mailles dans la maille de gauche conduit à :

$$E = ri_1 + \frac{q_1}{C} + L \frac{di}{dt} \quad \text{d'où} \quad \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 + \frac{r}{L} \dot{q}_1 + \frac{q_1}{LC} = \frac{E}{L}$$

Dans la maille de droite, cela donne :

$$L \frac{di}{dt} = \frac{q_2}{C} + ri_1 \quad \text{soit} \quad \ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 + \frac{r}{L} \dot{q}_2 + \frac{q_2}{LC} = 0$$

On a donc :

$$a = \frac{r}{L} = 2\lambda \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{LC} = 2\omega_0^2$$

4) En sommant les deux équations différentielles on obtient :

$$\dot{Q} + \frac{1}{rC} Q = \frac{E}{r}$$

Par différence, il vient :

$$\ddot{q} + \frac{r}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$$

Dans la suite du problème, on utilisera pour les différents éléments les valeurs numériques suivantes : $C = 1,0 \mu F$, $L = 5,0 \text{ mH}$, $r = 200 \Omega$.

- 5) a) En posant $\tau = rC$ (constante de temps), la solution de la première équation différentielle est de la forme :

$$Q(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + CE$$

Comme à $t = 0^+$, $Q(0^+) = q_1(0^+) + q_2(0^+) = CE$, il en résulte que $A = 0$ et donc :

$$\boxed{\forall t > 0, Q(t) = CE}$$

- b) On pose l'équation caractéristique et son discriminant :

$$x^2 + \frac{r}{L}x + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Delta = \frac{r^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = \frac{1}{L} \left(\frac{2 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} - \frac{4}{1 \cdot 10^{-6}} \right) = 0$$

Il s'agit donc d'un régime critique (une seule racine double $x_0 = -\lambda$). Il vient :

$$q(t) = (\alpha t + \beta) e^{-\lambda t} + CE$$

où α et β sont deux constantes. Les conditions initiales étant $q(0^+) = 0$ et $\dot{q}(0^+) = i_1(0^+) - i_2(0^+) = i(0^+) = 0$ par continuité du courant dans la bobine, on en déduit :

$$\beta = -CE \quad \text{et} \quad \alpha = \lambda\beta = -\lambda CE$$

Finalement :

$$\boxed{q(t) = CE \left[1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \right]}$$

- 6) On remarque que :

$$i(t) = \dot{q}(t) = \alpha e^{-\lambda t} - \lambda(\alpha t + \beta) e^{-\lambda t} = (\alpha - \lambda\beta - \lambda\alpha t) e^{-\lambda t}$$

d'où :

$$\boxed{i(t) = CE \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$

- 7) Par définition :

$$W_g = \int_0^{+\infty} E i_1(t) dt = \int_0^{+\infty} E \dot{q}_1(t) dt = E (q_1(+\infty) - q_1(0^+))$$

et donc :

$$\boxed{W_g = \frac{CE^2}{2}}$$

Un bilan énergétique conduit alors à :

$$W_g = W_J + W_C$$

où W_C est l'énergie reçue par les deux condensateurs (durant la deuxième phase) qui est aussi égale à la variation de l'énergie stockée dans ces deux condensateurs :

$$W_C = \frac{q_1^2(+\infty) - q_1^2(0^+)}{2C} + \frac{q_2^2(+\infty) - q_2^2(0^+)}{2C} = \frac{CE^2}{4}$$

On en déduit que :

$$\boxed{W_J = \frac{CE^2}{2}}$$

3 Analyse d'un circuit

- 1) On lit la période de $e(t)$ et de $u(t)$: $T = 1$ ms, ce qui entraîne :

$$f = 1 \text{ kHz}$$

De même, graphiquement :

$$E_m = 4 \times 2 = 8 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_m = 3,6 \text{ V}$$

On en déduit l'amplitude de l'intensité : $I_m = \frac{U_m}{R} = 40 \text{ mA}$

- 2) On mesure de même le décalage temporel $\tau = 0,155$ ms, u étant en retard par rapport à $e(t)$. On obtient donc :

$$\varphi = -2\pi f \tau = -0,97 \text{ rad}$$

- 3) Un théorème pont diviseur de tension conduit à :

$$\underline{u}(t) = \frac{R}{R+r+jL\omega} \underline{e}(t) \quad \text{d'où} \quad R+r+jL\omega = R \frac{\underline{e}(t)}{\underline{u}(t)} = R \frac{E_m}{U_m} e^{-j\varphi}$$

En considérant l'égalité des parties réelle et imaginaire on obtient :

$$R+r = R \frac{E_m}{U_m} \cos \varphi \quad \text{et} \quad L\omega = -R \frac{E_m}{U_m} \sin \varphi$$

A.N. :

$$r = 22 \, \Omega \quad \text{et} \quad L = 26 \text{ mH}$$

ce qui est cohérent avec les ordres de grandeurs des composants utilisés en TP.

- 4) Non car il y a un problème de masses : il faut que la masse du générateur coïncide avec la masse de l'oscilloscope.

FIN