

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°1 du 19-09-2019

— Durée : 4 heures —

Problème n° 1 – Accordeur de guitare

Centrale TSI 2019

Nous allons étudier quelques aspects de l'accordeur électronique d'une guitare qui comporte les six cordes traditionnelles qui, lorsqu'elles sont bien accordées, possèdent les fréquences suivantes :

Corde	Fréquence f_{ac}
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196,0 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée de fréquence f_{co} . Le principe de fonctionnement de l'accordeur est le suivant :

- Sélection de la corde à accorder (f_{ac} est donc fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplification assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification de ce signal et filtrage.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Informations sur l'amplificateur opérationnel :

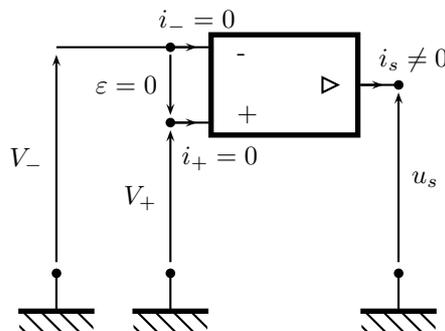


FIGURE 1 – Amplificateur opérationnel idéal utilisé en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Il est alimenté en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel idéal présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles comme pour le circuit multiplicateur. On considère que $i_+ = i_- = 0$. L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le régime linéaire où la tension de sortie est reliée à la tension différentielle d'entrée ε par la loi donnée ci-dessous et le régime non linéaire où la tension de sortie sature comme pour le multiplicateur au niveau des tensions $\pm 15\text{ V} = \pm V_{sat}$. C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \frac{\mu}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon$$

avec $\mu_0 \simeq 10^6$ et $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi en considérant, dans le cadre du modèle d'amplificateur opérationnel idéal, que le gain $\mu_0 \rightarrow \infty$, on n'obtient une sortie bornée que si $\varepsilon = 0$. En fonctionnement non linéaire, on a $u_s = +V_{sat}$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $u_s = -V_{sat}$ lorsque $\varepsilon < 0$.

A. Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

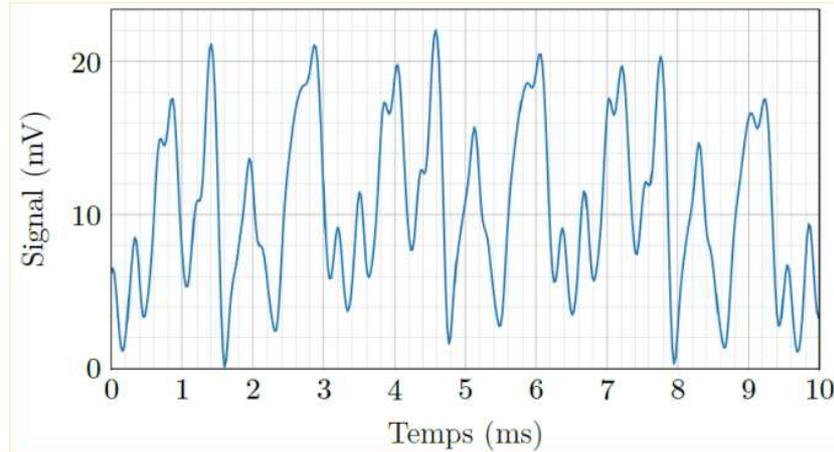


FIGURE 2 – Signal de la guitare

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (si on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

B. Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre (F_a) de la figure 3.

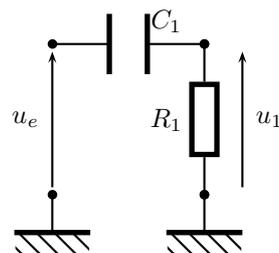


FIGURE 3 – Filtre (F_a)

5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω de ce signal.
6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de BODE asymptotique relatif au gain.
8. On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

C. Deuxième filtre

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. On étudie les filtres de la figure 4.

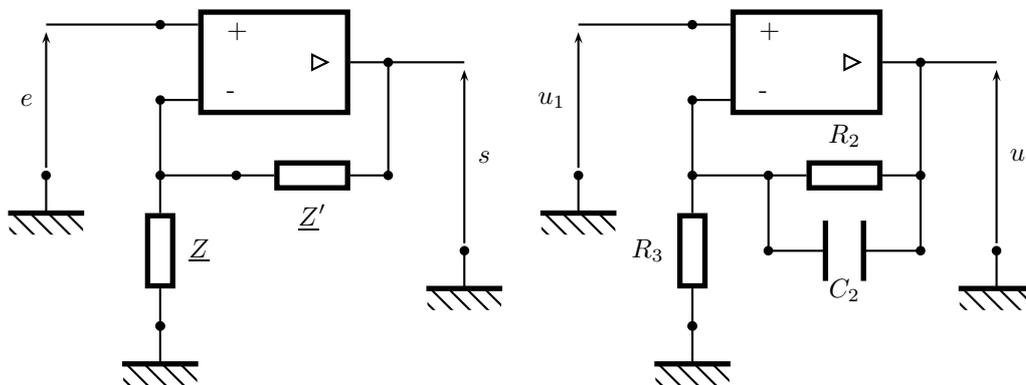


FIGURE 4 – Deuxième filtre (à droite) (F_b)

9. Soit le filtre de la figure 4 à gauche. Exprimer sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' . Que devient \underline{H} si les impédances sont $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = R'$? Quel est dans ce cas l'intérêt du montage?

En sortie du filtre (F_a), le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre (F_b) de la figure 4 à droite.

10. Quelle est l'impédance \underline{Z}_{eq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

11. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \frac{u_2}{u_1}$ de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .

12. Mettre \underline{H}_2 sous la forme :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

13. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence? en haute fréquence?

14. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

D. Filtrage sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnées sur l'accordeur f_{ac} (on suppose la corde légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera étudié dans la dernière partie du problème.

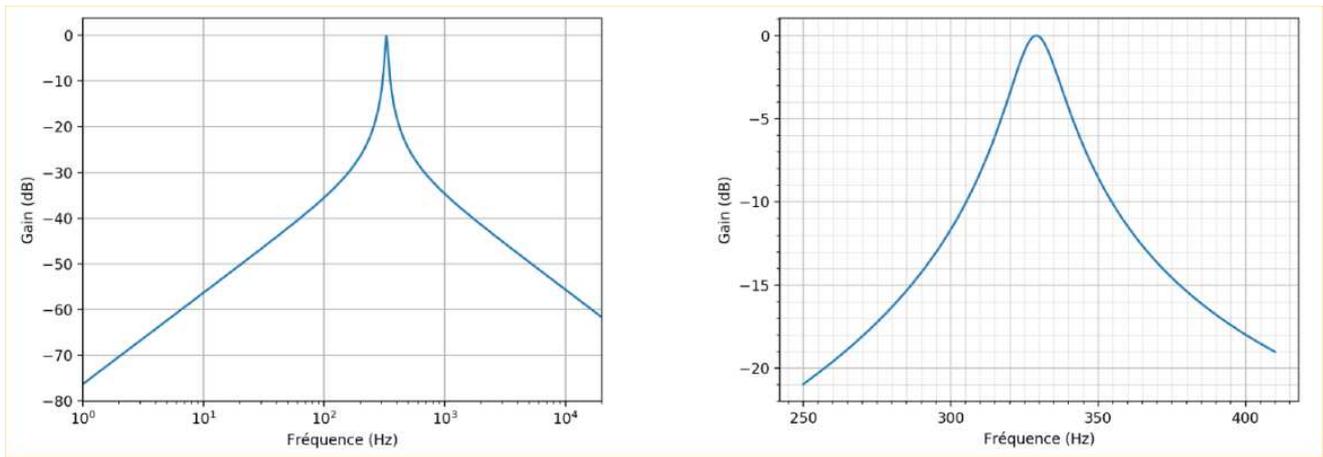
Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de BODE relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

15. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique?

16. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB et de son facteur de qualité. Commenter.

17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

FIGURE 5 – Diagramme de BODE en gain du filtre (F_c)

Analyse spectrale

La figure 7 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

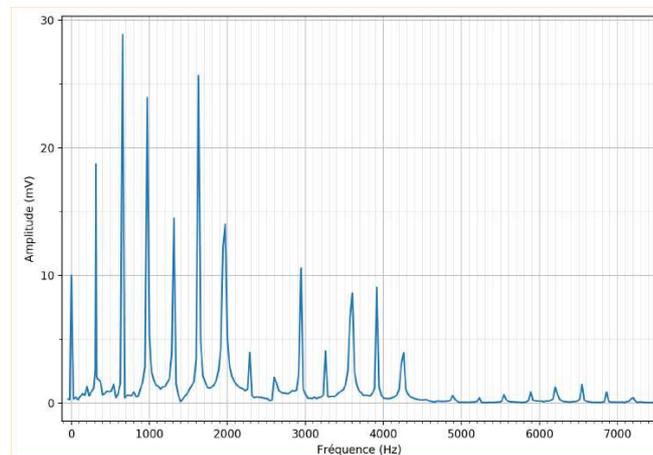


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

18. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

19. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre des figures 7 et 8 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

20. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

21. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

E. Filtre sélectif à capacité commutée

22. Rappeler l'expression de la charge q transférée à un condensateur de capacité C en fonction de la tension u_c à laquelle il est soumis. On précisera les conventions d'orientation utilisées.

On monte maintenant un condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B comme l'indique la figure 9.

On fait les hypothèses suivantes :

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).
- Ils sont toujours dans des états complémentaires : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal u_{ref} carré périodique de fréquence f_k (période T_k) de telle sorte que :

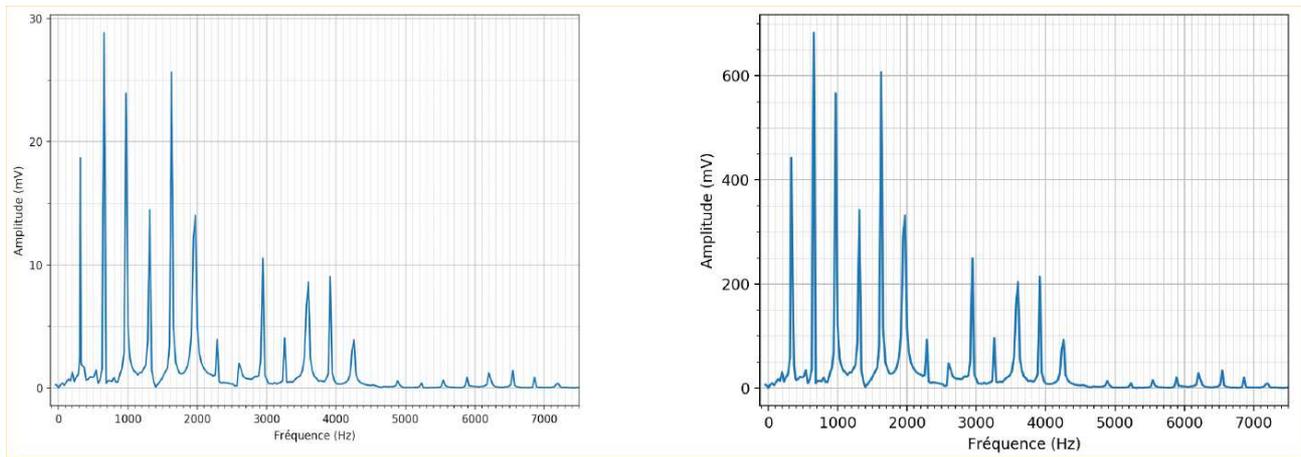


FIGURE 7 – Spectres (a) à gauche et (b) à droite

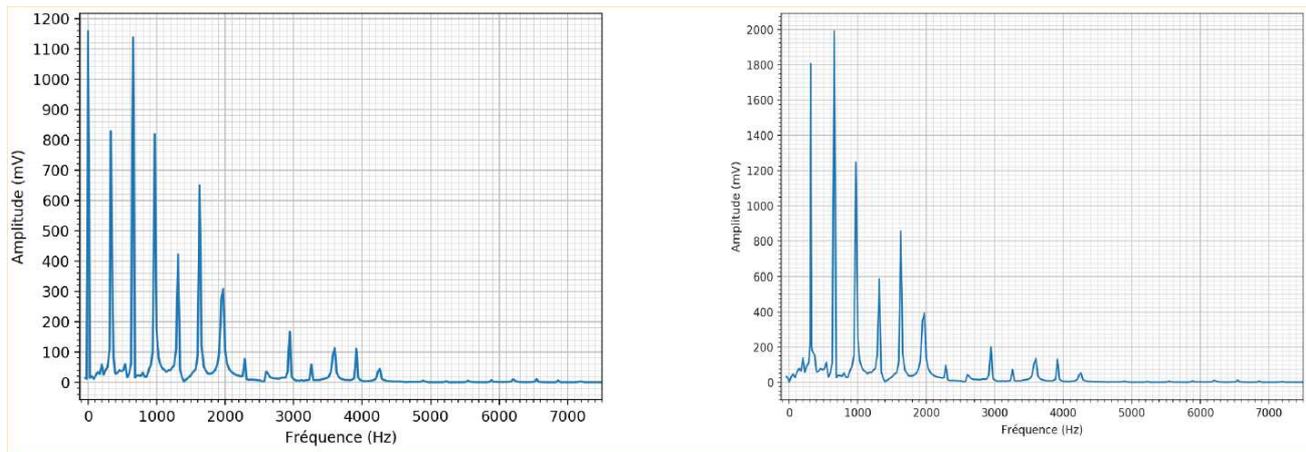


FIGURE 8 – Spectres (c) à gauche et (d) à droite

- sur l'intervalle $[0, T_k/2[$: K_A est fermé et K_B ouvert ;
 - sur l'intervalle $[T_k/2, T_k[$: K_A est ouvert et K_B fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
 — La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

23. Donner les expressions de q_1 et q_2 , les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, T_k/2[$ et $[T_k/2, T_k[$. En déduire l'expression de la charge $\delta q = q_2 - q_1$ transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

24. À quoi est égale la charge Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

25. En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A , V_B , C_k et f_k .

26. Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance R_k .

27. Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_c).

Problème n° 2 – Capteurs de proximité

E3A PSI 2013

Les capteurs de proximité sont caractérisés par l'absence de liaison mécanique entre le dispositif de mesure et l'objet constituant la cible. L'interaction entre eux est réalisée par l'intermédiaire d'un champ électrique, d'un champ magnétique ou d'un champ électromagnétique.

On donne les relations :

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \quad \text{et} \quad \cos a = \frac{1 - \tan^2 a/2}{1 + \tan^2 a/2}$$

Informations sur l'amplificateur opérationnel :

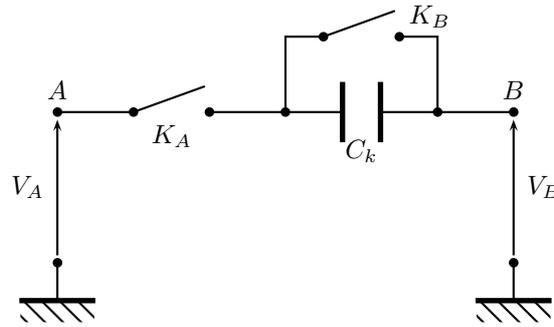


FIGURE 9 – Capacité commutée

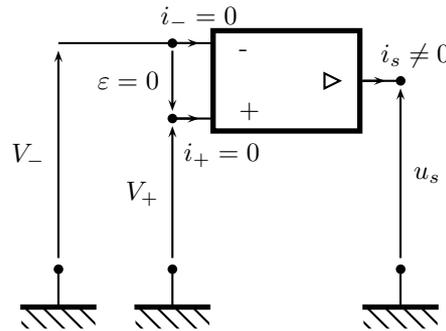


FIGURE 10 – Amplificateur opérationnel idéal utilisé en régime linéaire

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel. Il est alimenté en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. Cette alimentation est à l'origine de l'énergie demandée au niveau de la sortie. L'amplificateur opérationnel idéal présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles comme pour le circuit multiplieur. On considère que $i_+ = i_- = 0$. L'amplificateur opérationnel présente deux types de fonctionnement : le régime linéaire où la tension de sortie est reliée à la tension différentielle d'entrée ε par la loi donnée ci-dessous et le régime non linéaire où la tension de sortie sature comme pour le multiplieur au niveau des tensions $\pm 15\text{ V} = \pm V_{sat}$. C'est cette alimentation qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. La relation entrée différentielle - sortie du domaine linéaire est modélisée par une fonction passe-bas d'ordre 1 :

$$u_s = \underline{\mu} \varepsilon = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon$$

avec $\mu_0 \simeq 10^6$ et $\omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi en considérant, dans le cadre du modèle d'amplificateur opérationnel idéal, que le gain $\mu_0 \rightarrow \infty$, on n'obtient une sortie bornée que si $\varepsilon = 0$. En fonctionnement non linéaire, on a $u_s = +V_{sat}$ lorsque $\varepsilon > 0$ et $u_s = -V_{sat}$ lorsque $\varepsilon < 0$.

A. Association de condensateurs

La tête de mesure de ce capteur est formée d'un conducteur cylindrique (A) et d'une enveloppe métallique coaxiale (B) réalisant un condensateur de capacité fixe C_e , voir le schéma de la figure 11. Lorsque la cible métallique s'approche de l'extrémité des conducteurs (A) et (B), ceux-ci constituent avec elle deux autres condensateurs. L'un de capacité $C(z)$ a pour armatures le disque externe du conducteur central cylindrique (A) de diamètre $2r$, z est la distance qui le sépare de la cible. L'autre est un condensateur parasite, de capacité $C_p(z)$, formé par l'enveloppe extérieure (B) du capteur et la cible. La capacité d'un condensateur plan de surface S et d'épaisseur d est donnée par :

$$C_{\text{plan}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

La capacité d'un condensateur cylindrique de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ et de hauteur ℓ est :

$$C_{\text{cyl}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln(r_2/r_1)}$$

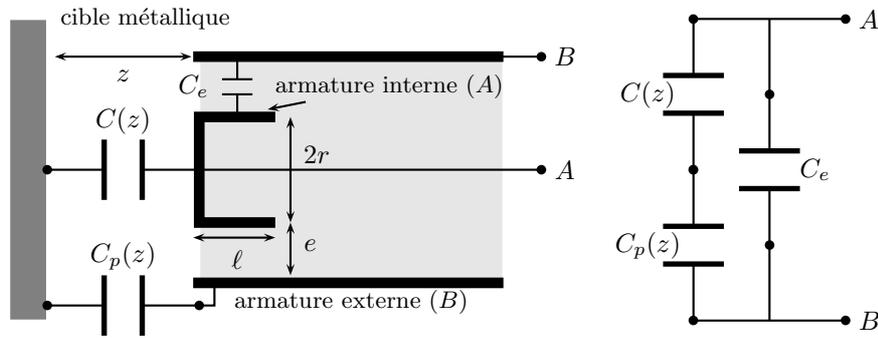


FIGURE 11 – Modélisation du capteur capacitif

1. Exprimer $C(z)$ en fonction de r , z et ε_0 puis C_e en considérant que $e \ll r$ ce qui permet de faire un développement limité au premier ordre en e/r . Déterminer la capacité équivalente C_{AB} en fonction de $C_p(z)$, $C(z)$ et C_e .

2. Si on considère que $C_p(z) \rightarrow \infty$, comment évolue l'expression de C_{AB} ? Proposer une opération technique simple permettant de s'affranchir de la capacité parasite $C_p(z)$ (ce qui sera le cas dans la suite du problème : $C_p(z) \rightarrow \infty$).

3. Montrer que la capacité C_{AB} peut s'écrire sous la forme :

$$C_{AB} = C_0 \left(1 + k \frac{\Delta z}{z_0} \right) \quad \text{avec} \quad C_0 = \pi \varepsilon_0 r \left[\frac{r}{z_0} + \frac{2\ell}{e} \right] \quad \text{et} \quad k = -\frac{1}{1 + \frac{2\ell z_0}{re}}$$

4. Déterminer numériquement C_0 et k sachant que $r = \ell = 10$ mm, $e = 1$ mm, $z_0 = 2$ mm et $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F · m⁻¹.

B. Conditionnement du capteur

À la tension électrique $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ peut être associée en notation complexe, le signal analytique $\underline{v}(t) = \underline{V}_0 \exp j\omega t$ où $\underline{V}_0 = V_0 \exp j\phi$ désigne l'amplitude complexe du signal et j le complexe tel que $j^2 = -1$. Les amplificateurs opérationnels (AO) sont supposés idéaux et en fonctionnement linéaire. Le capteur de capacité C_{AB} est inséré dans un circuit de mesure comportant deux blocs : un bloc amplificateur et un bloc de filtrage, voir le schéma de la figure 12.

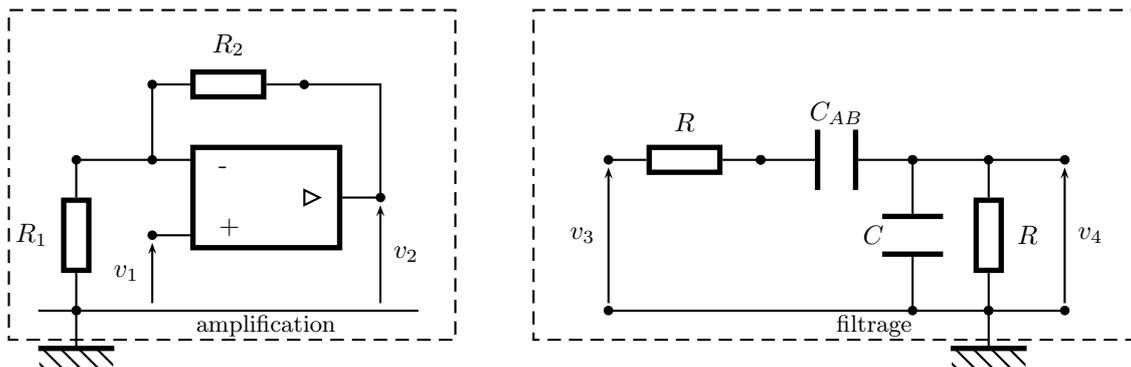


FIGURE 12 – Amplification-Filtrage

5. Exprimer les fonctions de transfert (ou transmittances) en boucle ouverte $\underline{H}_1 = \underline{V}_2(j\omega)/\underline{V}_1(j\omega)$ et $\underline{H}_2 = \underline{V}_4(j\omega)/\underline{V}_3(j\omega)$ en supposant chacun des blocs alimenté par une tension sinusoïdale. Préciser la nature du filtre de fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega)$.

La borne de sortie de l'amplificateur est reliée à l'entrée du filtre et la borne de sortie du filtre est reliée à la borne non inverseuse de l'AO, de sorte que $v_1 = v_4$ et $v_2 = v_3 = v_s$.

6. Quelle est l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)$ en régime sinusoïdal? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la tension $v_s(t)$ pour un régime quelconque. Pour quelle valeur de R_2 , fonction de R_1 , C et C_{AB} , des oscillations sinusoïdales stables peuvent-elles s'établir? Quelle est alors la pulsation ω_0 de ces oscillations?

Fixons $C = C_0$ et $R = R_1 = 100$ k Ω et supposons que $\Delta z = 0$.

7. Déterminer les valeurs de la résistance R_2 et de la pulsation ω_0 de l'oscillateur.

Dès que la tête du capteur se déplace par rapport à la cible, la capacité C_{AB} varie. La résistance R_2 garde la valeur obtenue dans la question précédente et C est fixée à C_0 .

8. Réécrire, pour un faible déplacement de la cible ($\Delta z/z_0 \ll 1$), l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ en faisant apparaître les paramètres k , C_0 , R et $\Delta z/z_0$. Comment évolue alors $v_s(t)$ pour un faible déplacement Δz positif ou négatif de la cible ?

La condition d'oscillation n'est plus vérifiée à chaque instant par une résistance R_2 fixe car cette condition s'écrit en fonction de la capacité C_{AB} variable. La résistance R_2 est remplacée par un montage approprié assurant les oscillations. Ce montage ne sera pas étudié ici.

9. Pour une valeur adaptée de R_2 , quelle est l'expression de la pulsation ω_{osc} des oscillations obtenues en fonction de ω_0 , k et $\Delta z/z_0$?

C. Conditionnement du signal

La tension $v_2(t) = V_0 \sin \omega t$ est injectée dans une série de trois montages élémentaires A, B et C ne comportant que des composants idéaux, voir le schéma de la figure 13.

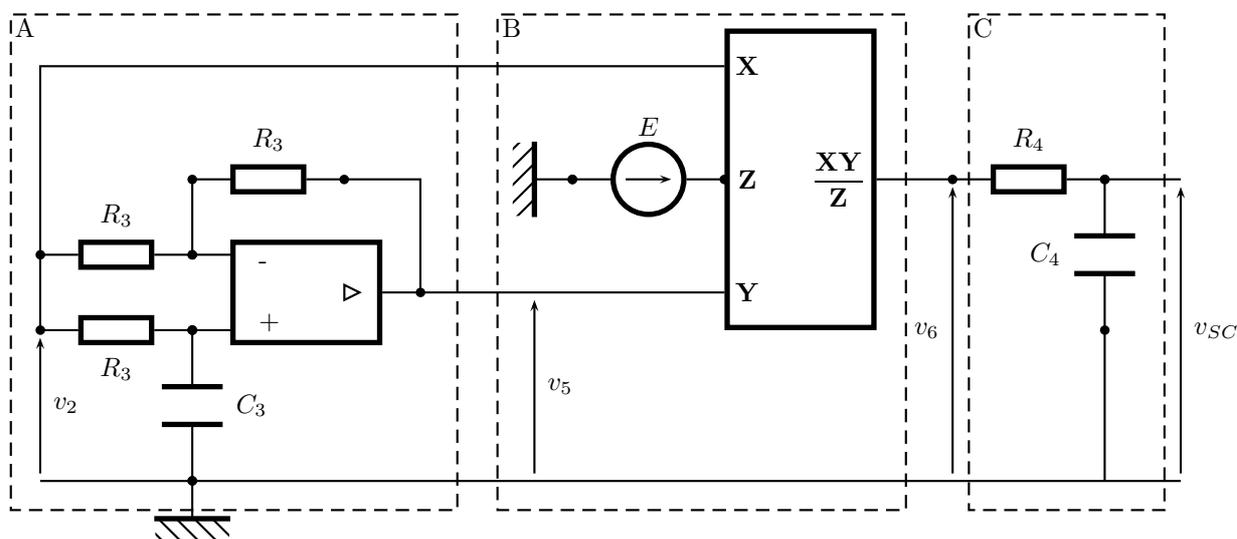


FIGURE 13 – Conditionnement du signal du capteur capacitif

10. Déterminer la transmittance $\underline{T}_A(j\omega) = \underline{V}_5(j\omega)/\underline{V}_2(j\omega)$. Comparer les amplitudes V_5 et V_2 puis exprimer le déphasage φ de v_5 par rapport à v_2 . Préciser la fonction de cet étage.

E représente une tension continue délivrée par un générateur.

11. Préciser le rôle joué par le bloc B. Exprimer la tension instantanée $v_6(t)$ en sorti de ce bloc, en fonction de l'amplitude V_0 , du déphasage φ , de la tension E , de la pulsation ω et de t .

12. Déterminer la fonction de transfert $\underline{T}_C(j\omega) = \underline{V}_{SC}(j\omega)/\underline{V}_6(j\omega)$. En déduire le rôle de l'étage C ainsi que sa pulsation caractéristique ω_C . Montrer que, par un choix judicieux de ω_C , la tension de sortie v_{SC} est continue et image de $\cos \varphi$.

13. Choisir la valeur particulière du produit R_3C_3 pour que la tension de sortie V_{SC} du montage soit continue et proportionnelle à la variation Δz de la distance entre la tête de mesure et la cible (au premier ordre non nul en $\Delta z/z_0$). Donner son expression, notée V_{SC} (car indépendante du temps), en fonction de E , k , V_0 et du rapport $\Delta z/z_0$.

14. Proposer une définition de la sensibilité S de ce capteur. L'exprimer en fonction de k , V_0 , E et z_0 , puis la calculer sachant que $V_0 = 5,0 \text{ V}$ et $E = 0,5 \text{ V}$.

15. Citer les avantages et les inconvénients à l'utilisation de ce capteur capacitif.