Correction - DS n°1bis (Centrale - Mines)

1 Accordeur de guitare (d'après Centrale TSI 2019)

A. Le signal

1. En appréciant le graphique, on peut proposer la moyenne : $\boxed{\langle u_e\rangle_t \simeq 10\,\text{mV}}$.

2. On peut repérer 2 périodes entre les dates 2 ms et 8 ms. La période est donc d'environ 3 ms ce qui correspond à une fréquence $\boxed{f_{co} = 330\,\text{Hz}}$.

3. Il s'agit de la corde de $\boxed{\text{Mi aigu}}$.

4. L'analyse spectrale de ce signal fera apparaître des harmoniques car le signal n'est $\boxed{\text{pas sinusoïdal}}$. Il y a d'autres composantes que le fondamental à 330 Hz. Quant à savoir si ces autres fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, c'est beaucoup plus difficile d'être affirmatif mais il semble que ce soit le cas au premier abord.

B. Premier filtre

5. Par diviseur de tension, on obtient facilement $\underline{H}_1 = \frac{R_1}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}}$ On peut écrire cette fonction de transfert selon : $\boxed{\underline{H}_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{jR_1C_1\omega}}}$.

6. Il s'agit d'un filtre passe-haut parce que $|\underline{H}_1|$ tend vers 0 en basse fréquence alors que si on travaille en haute fréquence, on trouve $\underline{H}_1 = 1$. La distinction haute et basse fréquence s'effectue par comparaison de ω avec la pulsation caractéristique de ce filtre $\boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}}$.

7. Si $\omega \ll \omega_1$ alors $\underline{H}_1 \simeq j\frac{\omega}{\omega_1}$, on obtient un gain qui évolue selon $G_{dB} = 20\log\omega - 20\log\omega_1$. On a une droite de pente +20 dB par décade. Pour la phase qui est l'argument de $\underline{H}_1$, on a $\frac{\pi}{2}$. Si l'on se place en haute fréquence, nous avons vu que $\underline{H}_1 = 1$, le gain est donc $G_{dB} = 0$ et la phase $\varphi = 0$. La représentation du diagramme de Bode est réalisé à la figure 1 où on a posé $x = \omega/\omega_1$.

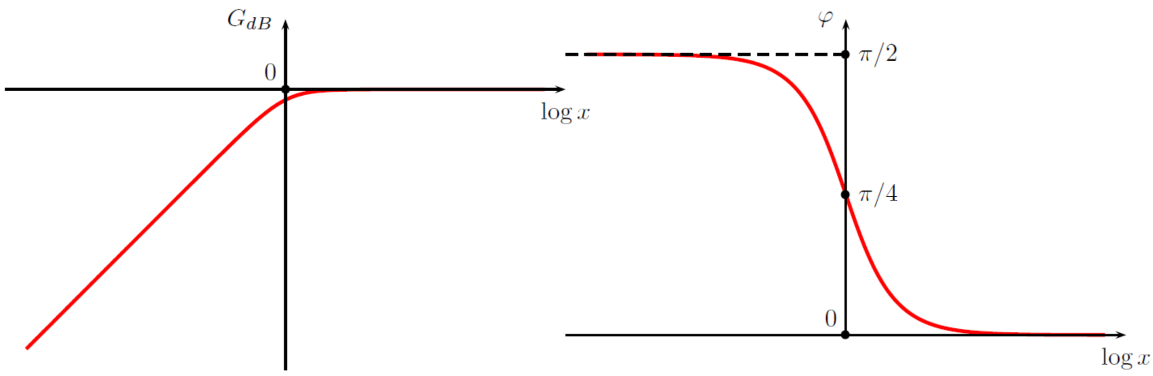


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre (F_a)

8. On trouve $\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi R_1C_1} = 15{,}9\,\text{Hz}}$. En effet, la fréquence de coupure correspond au moment où la fonction de transfert vérifie $|\underline{H}|(f_1) = \frac{H_{1,max}}{\sqrt{2}}$. Ce premier filtre a pour objectif de couper la composante continue du signal $u_e(t)$.

C. Deuxième filtre

9. On peut constater par le montage que $e = V_+$. Puisque l'amplificateur est en régime linéaire, on a $V_+ = V_-$. Or, par diviseur de tension, on voit que $\frac{V_-}{s} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+\underline{Z}'}$. La fonction de transfert est alors $\boxed{\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}}$. Si on utilise de simples résistances, on a une fonction de transfert $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$ réelle et indépendante de la fréquence.

Avec un tel filtre, on ne filtre rien du tout puisque le traitement des harmoniques sera le même pour chacune d'entre-elles. On amplifie le signal sans le déformer.

10. On a $\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2 \frac{1}{jR_2C_2\omega}}{R_2+\frac{1}{jR_2C_2\omega}}$. On peut simplifier en écrivant : $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}}$.

11. Avec le calcul général effectué avant, on trouve que $\boxed{\underline{H}_2 = 1 + \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{1+jR_2C_2\omega}}$.

12. On obtient la forme demandée en posant $\boxed{G_0 = \frac{R_2}{R_3}}$ et $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}}$.

13. $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence peut s'approximer à $\boxed{1 + G_0}$ alors qu'en haute fréquence, on a $\boxed{\underline{H}_2 \simeq 1}$.

14. On trouve $\boxed{f_2 = \frac{1}{2\pi R_2C_2} = 498\,\text{Hz}}$ et $\boxed{G_0 = \frac{R_2}{R_3} = 113}$. Ce filtre renforce clairement les basses fréquences d'un facteur de l'ordre de 100, principalement en dessous de 500 Hz et donc en particulier le fondamental du signal de départ qui est à 330 Hz par rapport aux plus hautes fréquences où $|\underline{H}_2| = 1$.

D. Filtrage sélectif

15. Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre car on peut apprécier les pentes de $\pm 20\,$dB par décade en basse et en haute fréquence. La fréquence centrale est $\boxed{f_{ac} = 330\,\text{Hz}}$, valeur qui est tout sauf une surprise puisque l'on souhaitait travailler sur l'accordage de la corde de Mi aigu.

16. La bande-passante à $-3\,$dB correspond à l'intervalle des fréquences qui assurent un module de la fonction de transfert compris entre sa valeur maximale H_{max} et cette même valeur divisée par racine de deux : $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \leq |H(f)| \leq H_{max}$. Comme le gain maximum est nul en décibels, cela veut dire que $H_{max} = 1$. À l'aide du graphique en échelle linéaire, on peut déterminer la bande passante comme constituée des fréquences comprises entre 320 Hz et 340 Hz. On a donc $\boxed{\Delta f = 20\,\text{Hz}}$. On peut démontrer que le facteur de qualité est relié à la bande-passante par $Q = \frac{f_{ac}}{\Delta f} = 16,5$. Cette valeur est déjà élevée pour un filtre. Le filtre passe-bande peut être qualifié de très sélectif.

17. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\,$Hz, on peut voir que cela correspond à un gain de $-6\,$dB. Cela signifie que l'amplitude du fondamental émis par la corde désaccordée est $\boxed{\text{divisé par 2}}$.

Analyse spectrale

18. Le spectre proposé présente une $\boxed{\text{composante continue de 10 mV}}$ que l'on repère à une fréquence nulle. Cela correspond à la moyenne que nous avions évaluée avant. Ensuite, en regardant bien le graphique, on peut constater que le fondamental est selon toute vraisemblance vers 330 Hz et qu'ensuite toutes les harmoniques sont situées à égale distance (en fréquence évidemment). D'ailleurs, l'harmonique de rang 3 est à 1 kHz, en divisant par 3 cette valeur on retrouve bien la fréquence que nous avions estimée pour le fondamental.

19. Le premier filtre est un passe-haut de fréquence $f_1 = 15,9\,$Hz, il va donc couper la composante continue en atténuant très peu les fréquences nettement supérieure à f_1 avec un fondamental à 330 Hz, on peut dire que l'harmonique est conservée en totalité. Le spectre correspondant à la tension u_1 est donc le spectre $\boxed{(a)}$.

20. Le filtre (F_b) va amplifier le fondamental à 330 Hz par un facteur de l'ordre de 100 comme nous l'avons dit avant puisque cette fréquence est inférieure à $f_2 = 498\,$Hz. On part d'une amplitude de 18 mV, on doit donc trouver une amplitude de 1 800 mV environ. C'est le spectre $\boxed{(d)}$ qui correspond à la tension $u_2(t)$.

21. Comme la bande passante $\Delta f = 20\,$Hz du filtre passe-bande est inférieure à la distance qui sépare deux fréquences du signal (330 Hz), le filtre donnera soit rien soit un signal monochromatique si la fréquence du signal est dans la bande passante. Ici, en l'espèce, on aura un signal de fréquence 330 Hz et donc une $\boxed{\text{tension sinusoïdale}}$.

E. Filtre sélectif à capacité commutée

22. On $\boxed{q = Cu_c}$ où $u_c = V_A - V_B$ et donc où q est portée par l'armature portée au potentiel V_A.

23. On a $q_1 = C_k(V_B - V_A)$ et $q_2 = 0$ car le condensateur a été court-circuité : la tension entre ses bornes est donc nulle. On en déduit que $\boxed{\delta q = C_k(V_A - V_B)}$.

24. La charge précédente représente la charge transférée pendant une durée T_k. Comme à chaque période, le phénomène se reproduit à l'identique, on peut écrire que : $\boxed{Q = \frac{t}{T_k}C_k(V_A - V_B)}$. Cette réponse suppose que l'on oublie la durée inférieure à une période qui termine un nombre entier de périodes très élevés. Cela est parfaitement justifié car $t \gg T_k$.

25. L'intensité moyenne correspond au rapport de la charge transférée et de la durée considérée. On a donc $I_m = \frac{Q}{t} = \frac{C_k}{T_k}(V_A - V_B)$. On peut encore exprimer cette intensité en utilisant la fréquence du cycle de commutation des interrupteurs : $\boxed{I_m = f_k C_k (V_A - V_B)}$.

26. La loi précédente montre que la différence de potentielle est proportionnelle à l'intensité moyenne à condition de travailler sur une durée grande devant T_k. C'est équivalent à la loi d'Ohm : $V_A - V_B = \frac{1}{f_k C_k} I_{moy}$. La résistance équivalente est donc : $\boxed{R_k = \frac{1}{f_k C_k}}$.

27. On peut constituer avec des ensembles (R, C) série et (R, C) parallèle un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est du type $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$ comme dans un filtre du type du pont de Wien. Grâce à la fréquence f_k, on fait évoluer R_k et on adapte le filtre passe-bande à une autre corde.

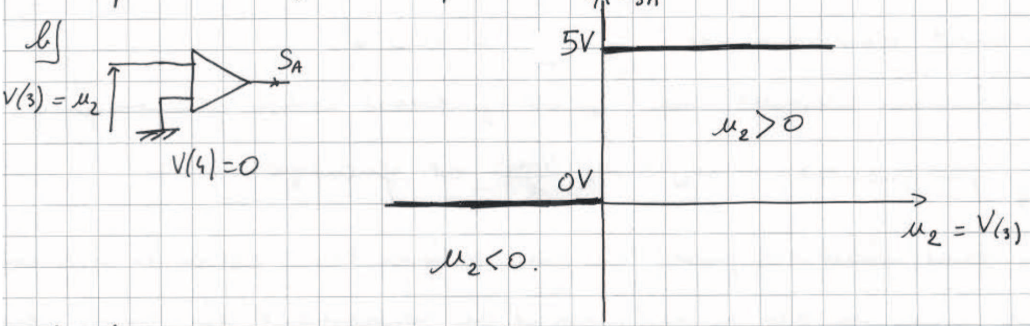
2 Loi de Moore (d'après Centrale MP 2015)

I Numérisation avant stockage.

A) 1) La plus petite durée mesurable est $\boxed{10^{-9}\,s}$. C'est la précision maximale : $\boxed{1\,ns}$.

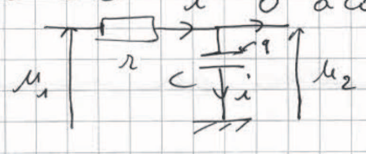
2) a) La masse est l'ensemble de tous les points portés au même potentiel, choisi nul par convention ; c'est le point de référence des potentiels

b)



3) A $t = 0$ $\quad u_1 = u$

Bloc B. i 0 à cause de A qui a une résistance d'entrée infinie



$u_1 = ri + u_2$ et $u_2 = \frac{q}{C} = \frac{\int i\,dt}{C}$ d'où $i = C\frac{du_2}{dt}$.

d'où $rC\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$

ESSM. $\quad u_{2_0} = Ae^{-t/\tau}$ où $\tau = rC$

SP $\quad u_{2_p} = u_1 = u$

SG $\quad u_2 = u_1 + Ae^{-t/\tau}$.

or à $t = 0$ $\quad q = 0$ donc $u_2 = 0$ d'où $\boxed{u_2 = u(1 - e^{-t/\tau})}$

B) 1) a) Si $t_1 \ll \tau$ $\quad e^{-t_1/\tau} = 1 - t_1/\tau$. et $\forall t < t_1$; $e^{-t/\tau} = 1 - t/\tau$

d'où $\boxed{u_2 = u\frac{t}{\tau}.}$ ou $\boxed{\frac{du_2}{dt} = \frac{u_1}{\tau}.}$

b) B est un bloc intégrateur.

c) u étant >0 $u_2(t\geq 0) > 0$ donc $\boxed{v_{SA} = 5V}$

2) a) A $t = t_1$ $v_2 = u\dfrac{t_1}{\tau}$.

A $t > t_1$ $u_1 = -V_{ref}$ d'où (en supposant $t_2 \ll \tau$)

$$u_2(t) = \underbrace{u\frac{t_1}{\tau}}_{\text{ordonnée à l'origine} = u_2 \text{ initiale}} - V_{ref}\left(\frac{t-t_1}{\tau}\right)$$

pour respecter la C.I.

pente $-\dfrac{V_{ref}}{\tau} = \dfrac{u_1}{\tau}$

parce que $\boxed{\dfrac{du_2}{dt} = \dfrac{u_1}{\tau}}$ reste vrai

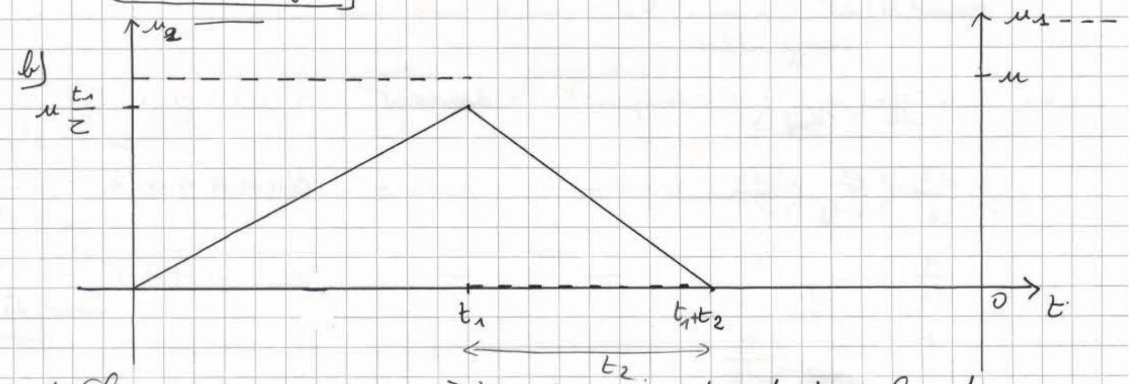
Soit $\boxed{u_2(t) = u\dfrac{t_1}{\tau} - \dfrac{V_{ref}}{\tau}(t-t_1)}$

t_1+t_2 est l'instant où u_2 devient ≤ 0.

$$0 = u\frac{t_1}{\tau} - \frac{V_{ref}(t_2+\cancel{t_1})}{\tau} + \cancel{\frac{V_{ref}t_1}{\tau}}.$$

$\boxed{t_2 = \dfrac{u\,t_1}{V_{ref}}}$

b)



c) Le compteur commence à t_1 et avance de 1 tous les $\dfrac{1}{f_{ck}}$

A t_2+t_1, il a avancé de $\dfrac{t_2}{1/f_{ck}} = s_N$ (on prend la partie entière en fait $E(\ )$).

$\boxed{s_N = E(f_{ck}(t_2))}$

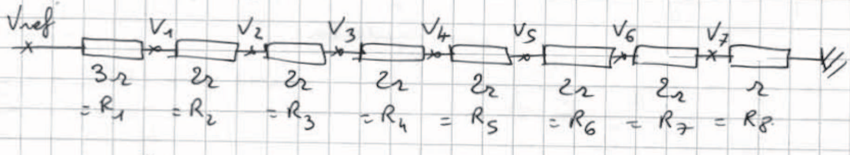
3) $(t_1+t_2)_{max} = 2t_1 = 2(2^N-1)/f_{ck}$ $N = 8$ $f_{ck} = 1\,GHz$

d'où $\boxed{t_{max} = 0{,}51\ \mu s}$ durée totale. Soit une période $f_{tmin} = 2{,}0.10^6 Hz$.

Or d'après le critère de Shannon-Nyquist, il faut $f_{éch} > 2 f_{signal}$. donc ici

$\boxed{\text{Signal} < 10\,\mathrm{MHz}}$ C'est limité aux signaux basses fréquences

C|1) On va calculer $V_1, V_2, V_3 \dots V_7$, les tensions de l'autre patte des comparateurs 1, 2, … 7.



On utilise la formule du pont diviseur de tension ($i_{entrée} = 0$ pour les comparateurs)

$$V_7 = V_{ref}\frac{R_8}{R_1+R_2+\dots R_8} = V_{ref}\frac{r}{16r} \qquad V_7 = \frac{V_{ref}}{16}.$$

$$V_6 = V_{ref}\frac{R_7+R_8}{R_1+R_2+\dots R_8} \qquad V_6 = \frac{3}{16}V_{ref}$$

$$V_5 = \frac{5}{16}V_{ref} \qquad V_4 = \frac{7}{16}V_{ref}.$$

$$V_3 = \frac{9}{16}V_{ref} \qquad V_2 = \frac{11}{16}V_{ref} \qquad V_1 = \frac{13}{16}V_{ref}.$$

si $u > V_i$ le comparateur i a un potentiel de sortie au niveau haut(1) et si $u < V_i$ au niveau bas(0).
codage utilisé

Ainsi si $\frac{13}{16} < u/V_{ref}$, les comparateurs donnent 1 1 1 1 1 1 1 qui sera traduit en $7 = 2^2+2^1+2^0$

$\frac{11}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{13}{16}$ ———— 0 1 1 1 1 1 1 ———— en $6 = 2^2+2^1$

$\frac{9}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{11}{16}$ ———— 0 0 1 1 1 1 1 ———— en $5 = 2^2+2^0$

$\frac{7}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{9}{16}$ ———— 0 0 0 1 1 1 1 ———— en $4 = 2^2$

$\frac{5}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{7}{16}$ ———— 0 0 0 0 1 1 1 ———— en $3 = 2^1+2^0$

$\frac{3}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{5}{16}$ ———— 0 0 0 0 0 1 1 ———— en $2 = 2^1$

$\frac{1}{16} < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{3}{16}$ ———— 0 0 0 0 0 0 1 ———— en $1 = 2^0$

$0 < \frac{u}{V_{ref}} < \frac{1}{16}$ ———— 0 0 0 0 0 0 0 ———— en $0 = 0$

On fait donc une conversion sur 3 bits avec 7 comparateurs $= 2^3 - 1$

s_N vaut entre 1 et 7 ; $\boxed{u_N = \underbrace{\frac{2s_N}{16}V_{ref}}_{=\frac{s_N}{8}V_{ref}}}$ par ex $u_N = \frac{6}{16}V_{ref}$ pour $\frac{5}{16}V_{ref} < u < \frac{7}{16}V_{ref}$.

2) Il faut $2^8 - 1 = 255$ comparateurs

D) 1) $N = 3$ (de 0 à 7, comme au C)1))

2) $u = 1{,}28$ V $\qquad s_N = 5$ en base 10

$$= 2^2 + 2^0$$

$$\boxed{s_N = 101} \text{ en base 2.}$$

$$\boxed{u_N = 1{,}25 \text{ V}} = \frac{5}{8} V_{ref} = \frac{5}{8} \times 2\text{V}.$$

3) L'écart maximal est $\frac{1}{16} V_{ref} = 0{,}125$ V

La numérisation arrondit car s_N est forcément entier tandis que $\frac{u}{V_{ref}/8}$ pas forcément. $u_N = s_N \frac{V_{ref}}{8}$ est quantifié.

E) 1) Il faut utiliser un passe-bas pour enlever les fréquences inaudibles sinon, à cause de la numérisation et du repliement du spectre, elles donneraient un signal fantôme audible (= qui existe dans le signal numérisé mais pas dans celui de départ).

Il ne doit garder que les fréquences audibles donc inférieures à 20 kHz.

2) $f_{éch}$ doit être supérieure à $2 f_{max}$, donc à 40 kHz.

Un choix courant (et économique) est 44 kHz.

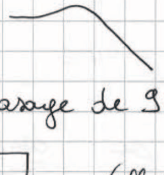
F) $\left|\frac{s_2}{s_1}\right|$ vaut 1,4 sur l'essai 1 à $f_1 = 1{,}0 \cdot 10^2$ Hz

2 sur l'essai 2 à $f_2 = 5{,}0$ kHz

7,2 sur l'essai 3 à $f_3 = 10$ kHz

$1{,}5 \cdot 10^{-2}$ sur l'essai 4 à $f_4 = 0{,}1$ MHz.

C'est donc un $\boxed{\text{passe-bas}}$



L'essai 3 correspond à un déphasage de 90° donc $\boxed{f_3 = f_0}$.

On réécrit $\boxed{H_{PB} = \frac{H_{0LP}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0}}}$ (effectivement $\arg(H_{PB}) = \frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$)

ou $\boxed{H_{PB} = \frac{-H_{0LP} Q j \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$

Quand $\omega \to 0$ $\left(\omega \ll \begin{matrix}\omega_p \\ \omega_0 \\ \omega_c\end{matrix}\right)$ $H \to H_{0LP}$

Donc $\boxed{H_{0LP} = 1,4}$ (à f_1)

A $\omega = \omega_0$ ($f = f_0 = f_3$), $|H_{PB}| = \left|\dfrac{-H_{0LP}\,Qj}{1}\right| = H_{0LP}\,Q.$

$= 7,2.$

donc $\boxed{Q = \dfrac{|H_{PB}(f_0)|}{H_{0LP}} = 5,1.}$

Il ne reste qu'à calculer f_c (qui n'a pas la même définition qu'en cours)

$$f_c = \underbrace{f_0 \times \sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}}$$

$\boxed{f_c = 15\ kHz.}$

et $f_P = f_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} = 10\ kHz.$