

Correction du DM n°1

1 Identification des paramètres d'un circuit RLC série à partir d'une courbe de résonance

Dans le domaine complexe, l'intensité $\underline{i}(t)$ obéit à l'équation : $\underline{e}(t) = (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})\underline{i}(t)$, où $\underline{e}(t)$ est la représentation complexe de la tension aux bornes du générateur, avec $|\underline{e}(t)| = E$. Il vient :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}(t)}{R} \frac{1}{1 + \frac{L}{R}j\omega - \frac{j}{RC\omega}}$$

ce qui est typique d'un passe-bande. On peut introduire un facteur de qualité Q et une pulsation centrale ω_0 en mettant cette relation sous la forme :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

et donc, en posant $x = \omega/\omega_0$:

$$I = |\underline{i}(t)| = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$$

L'amplitude maximale de l'intensité est obtenue pour $x = 1$ et :

$$I_{max} = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{I_{max}} = 100 \, \Omega$$

D'autre part, la bande passante vérifie :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

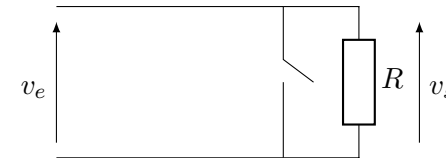
d'où

$$\begin{cases} L = R \frac{Q}{\omega_0} = \frac{5R}{4\pi f_0} = 79,6 \, \text{mH} \\ C = \frac{1}{RQ\omega_0} = \frac{1}{5\pi R f_0} = 1,27 \, \mu\text{F} \end{cases}$$

2 Étude d'un filtre

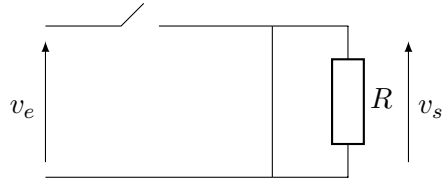
III.A - Analyse qualitative

- a) L'impédance d'un condensateur est $1/jC\omega$ et tend vers l'infini (en module) lorsque $\omega \rightarrow 0$. Le condensateur se comporte donc comme un interrupteur ouvert en basse fréquence. De plus, une bobine idéale (d'impédance $jL\omega$) se comporte comme un fil en basse fréquence. La représentation du circuit est donc :



On a donc $v_s = v_e$ en basse fréquence.

- b) En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil (son impédance tend vers 0) tandis qu'une bobine se comporte comme un interrupteur ouvert ($|jL\omega| \rightarrow +\infty$). Le circuit équivalent devient :



et donc $v_s = 0$ en haute fréquence.

c) Il s'agit d'un filtre passe-bas.

III.B - Analyse quantitative

III.B.1) L'association parallèle RC est un dipôle d'impédance :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Le théorème pont diviseur de tension conduit ensuite à :

$$v_s(t) = v_e(t) \frac{\underline{Z}_{eq}}{jL\omega + \underline{Z}_{eq}}$$

d'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2}$$

Par identification, nous obtenons :

$$H_0 = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On vérifie que $\underline{H} \rightarrow 1$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ ($v_s = v_e$) et que $\underline{H} \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow +\infty$ ($v_s \rightarrow 0$).

III.B.2)

a) $V_{sm} = |\underline{H}| V_{em}$. On mesure les amplitudes V_{sm} et V_{em} avec un oscilloscope ou un voltmètre numérique utilisé en mode AC.

b) $\varphi_s = \arg(\underline{H}) + \varphi_e$. On mesure le déphasage $\varphi_s - \varphi_e$ avec un oscilloscope, en mesurant le décalage temporel ou bien avec une mesure automatique.

III.B.3) Diagramme de Bode

a) On a :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

ce qui conduit au résultat en développant la parenthèse.

Pulsation	$\underline{H}$	$ \underline{H} $	G_{dB}	$\varphi = \arg(\underline{H})$
$\omega \ll \omega_0$	1	1	0	0
$\omega = \omega_0$	$\frac{1}{\sqrt{2}j}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-10 \log 2 = -3$	$-\pi/2$
$\omega \gg \omega_0$	$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$	$-40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$-\pi$

b) c) et d)

On obtient alors les diagrammes de Bode représentés sur les FIGURES 1 et 2.

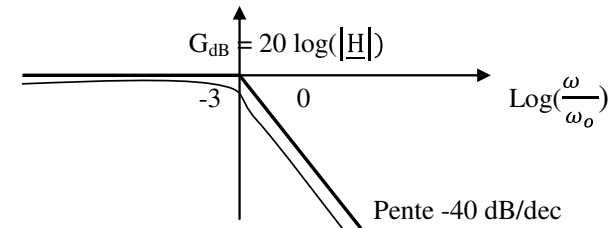


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du gain.

La pulsation de coupure à -3 dB est donc ω_0 .

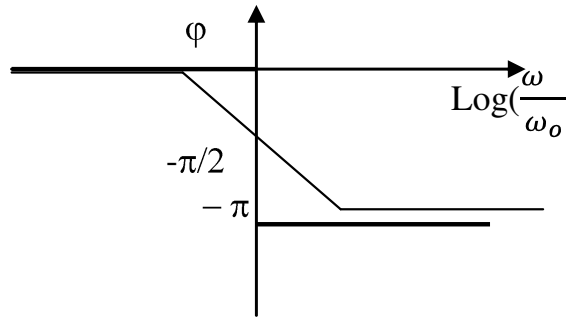


FIGURE 2 – Diagramme de Bode de la phase.

IV.B - Modulation

IV.B.1) D'après le schéma-bloc :

$$s(t) = p(t) + k \times p(t) \times e(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$$

On posera donc : $m = k A_m$.

IV.B.2) La courbe est une sinusoïde de période T_{port} , dont l'amplitude varie avec une période plus importante T_m . On lit sur le graphe : $T_{\text{port}} = 5 \mu\text{s}$ d'où $f_{\text{port}} = 200 \text{ kHz}$ et $T_m = 250 \mu\text{s}$ d'où $f_m = 4 \text{ kHz}$.

L'amplitude du signal varie entre $A_p(1 + m) = 2,7 \text{ V}$ et $A_p(1 - m) = 1,6 \text{ V}$ d'où $A_p = 2,1 \text{ V}$ et $m = 0,26$.

IV.B.3) En utilisant : $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$, on obtient :

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t) + \frac{A_p m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} + f_m)t) + \frac{A_p m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} - f_m)t)$$

ce qui donne le spectre représenté sur la FIGURE 3 :

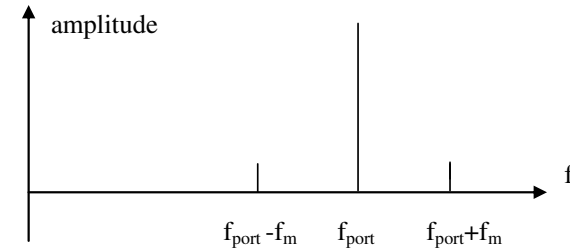


FIGURE 3 – Spectre du signal modulé.

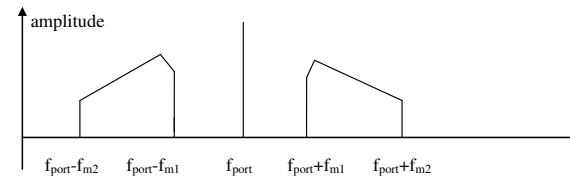


FIGURE 4 – Spectre du signal complet.

IV.B.4) a) Le spectre est représenté sur la FIGURE 4.

IV.B.4) b) La bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal $s(t)$ est donc $[f_{\text{port}} - f_{m2}, f_{\text{port}} + f_{m2}]$, soit $[180,5 \text{ kHz}; 189,5 \text{ kHz}]$. Il faut utiliser un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = f_{\text{port}} / \Delta f = 20$.

IV.B.4) c) La bande passante est assez étroite pour que les différents signaux modulateurs puissent être récupérés par une même antenne.

IV.C Démodulation synchrone

IV.C.1)

$$\begin{aligned}
 s'(t) &= k p(t) s(t) \\
 &= k A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t) [A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t) \\
 &\quad + \frac{A_p m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} + f_m)t) + \frac{A_p m}{2} \cos(2\pi(f_{\text{port}} - f_m)t)] \\
 &= \frac{k A_p^2}{2} \left[1 + \cos(2\pi 2f_{\text{port}} t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_{\text{port}} + f_m)t) \right. \\
 &\quad \left. + m \cos(2\pi f_m t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_{\text{port}} - f_m)t) \right]
 \end{aligned}$$

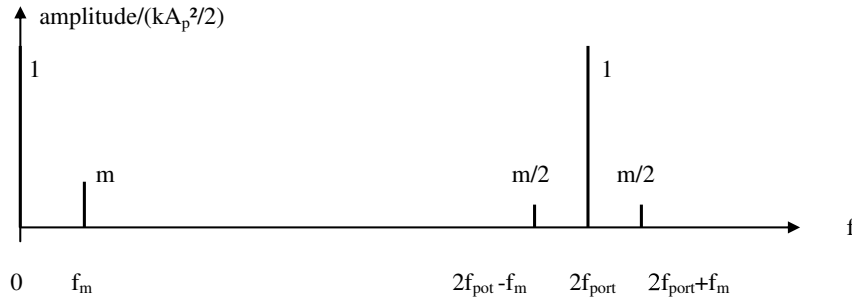


FIGURE 5 – Spectre du signal $s'(t)$.

IV.C.2)

- a) Le filtre passe-bas (1) élimine les 3 fréquences les plus élevées, il reste donc la composante continue et l'harmonique à f_m :

$$s''(t) = \frac{k A_p^2}{2} [1 + m \cos(2\pi f_m t)]$$

- b) On veut $G_{dB}(2f_{\text{port}}) = -80 \text{ dB} = 40 \log_{10} \left(\frac{f_0}{2f_{\text{port}}} \right)$, d'où :

$$f_0 = 0,02 f_{\text{port}} = 4000 \text{ Hz} \implies \omega_0 = 2,5 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

et

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = 0,02 f_{\text{port}} \implies L = \frac{1}{4\pi^2 C \times 0,02^2 f_{\text{port}}^2} = 1,85 \text{ H}$$

ce qui est une valeur d'inductance élevée mais tout à fait atteignable en laboratoire.

- c) Le condensateur C' élimine la composante continue. Il reste alors :

$$d(t) = \frac{k A_p^2}{2} m \cos(2\pi f_m t)$$

- d) Le filtre passe-bas (2) élimine l'harmonique à f_m : $a(t) = \frac{k A_p^2}{2}$.
- e) La fréquence de $d(t)$ est f_m , le rapport des amplitudes de $d(t)$ et $a(t)$ est $m = k A_m$. L'analyse de $d(t)$ et $a(t)$ permet donc de reconstituer le signal modulant $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$.