DM n°3
(Pour le vendredi 1 octobre 2021)

1 Étude d'un satellite

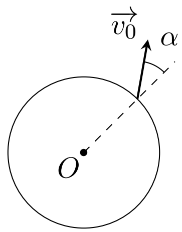
Données :

Constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
Rayon de la Terre $R_T = 6\ 400$ km
Masse de la Terre $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg

Dans tout le problème, la Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse totale M_T. On suppose que sa répartition de masse est homogène. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel terreste (R_T) supposé galiléen.

I. Lancement d'un satellite

Un satellite assimilé à un corps ponctuel M de masse m est lancé depuis la surface de la Terre une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et sous un angle α par rapport à la verticale locale (voir figure ci-dessous). Ce corps n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre. On néglige donc les frottements liés à l'atmosphère.



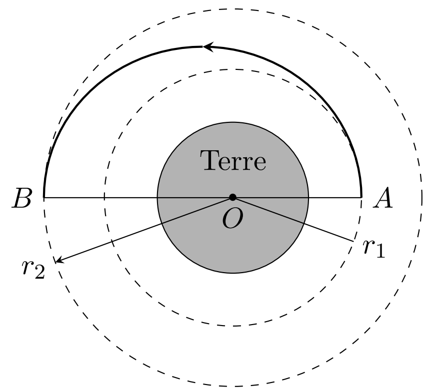
1. Le mouvement ultérieur de M sera-il conservatif ? Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de m, M_T, R_T, G et $v_0 = \|\overrightarrow{v_0}\|$ puis en fonction de m, R_T, v_0 et g, où g désigne le champ de gravitation à la surface de la Terre.
2. Calculer la norme du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de M par rapport au centre de la Terre à l'instant du lancement. Montrer que ce moment cinétique se conservera au cours du mouvement.
3. Montrer que la trajectoire de M sera plane et préciser le plan de cette trajectoire en fonction des données initiales (position, vitesse) du mouvement.
4. On suppose que $v_0 < \sqrt{2gR_T}$. Justifier que la trajectoire de M est une ellipse.

II. Étude des trajectoires circulaires

Par un procédé qu'on ne décrira pas dans ce problème, le satellite est maintenant placé sur une orbite circulaire autour de la Terre. On note r_1 le rayon de cette orbite.

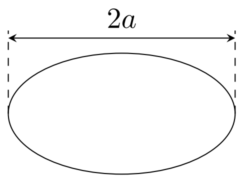
5. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer la norme v_1 de la vitesse du satellite en fonction de G, M_T et r_1.
6. En déduire la troisième loi de Kepler reliant la période T de révolution, r_1, G et M_T.
7. Déterminer les énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de G, m, M_T et r_1.

III. Transfert d'orbite



On veut transférer le satellite, toujours assimilé à un point matériel M de masse m, initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6\ 800$ km vers une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 42\ 400$ km. Dans ce but, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite *ellipse de Hohmann* dont le centre de la Terre est un foyer.

On admet que sur une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique E_m et la troisième loi de Kepler s'écrivent de la même façon que pour le mouvement circulaire étudié précédemment, à condition de remplacer $2r_1$ par $2a$ dans les expressions, où $2a$ est la longueur du grand axe de l'ellipse (figure ci-dessous).



9. Exprimer l'énergie mécanique E_{m3} de M lorsque sa trajectoire est l'ellipse de transfert en fonction de G, m, M_T, r_1 et r_2.
10. On veut que le satellite, initialement sur son orbite circulaire basse, soit placé sur l'ellipse de Homann au point A de façon instantanée. Pour ce faire, on allume un réacteur pendant un laps de temps très court, ce qui lui communique une vitesse de norme v_1', tangentielle à la trajectoire circulaire. Déterminer v_1' en fonction de G, M_T, r_1 et r_2. En déduire l'écart de vitesse $\Delta v_A = v_1' - v_1$.
11. Déterminer la norme v_2' de la vitesse de M lorsqu'il atteint le point B, en fonction de r_1, r_2 et v_1' .
12. Les réacteurs sont remis en route en B de sorte à faire passer le satellite sur la trajectoire circulaire haute de façon instantanée : leur action est de faire passer la vitesse de M de v_2' à v_2 tout en restant tangentielle à la trajectoire circulaire haute.

    Déterminer l'écart de vitesse $\Delta v_B = v_2 - v_2'$. Application numérique : calculer Δv_B.
13. Déterminer et calculer la durée τ du transfert entre A et B.

2 Substitution sur le bromoéthane

On étudie, à 25°C, l'action d'une solution de soude diluée sur le bromoéthane ; la réaction totale a pour équation :

$$CH_3CH_2Br + OH^- \longrightarrow CH_3CH_2OH + Br^-$$

On utilise des mélanges stœchiométriques en bromoéthane et en ion hydroxyde. Soit C_0 la concentration initiale commune des deux réactifs. Le tableau ci-dessous donne les temps de demi-réaction pour différentes valeurs de C_0.

C_0 (mmol.L^{-1})	10	25	50	75	100
$\tau_{1/2}$ (min)	1100	445	220	150	110

1. (a) À l'aide d'une régression linéaire, démontrer que ces données sont compatibles avec une réaction d'ordre 1 par rapport à chacun des réactifs.

   (b) Déterminer la constante de vitesse k de la réaction.
2. L'énergie d'activation de la réaction est $E_a = 89$ kJ.mol^{-1}. En déduire la valeur littérale puis numérique du temps de demi-réaction à 40 °C lors d'une expérience où C_0 vaut 50 mmol.L^{-1}. On donne $R = 8{,}314$ J.K^{-1}.mol^1.
3. On réalise à présent une expérience à 25°C où les concentrations initiales des deux réactifs sont différentes :

$$[\text{EtBr}] = a\,;\ [\text{OH}^-] = b$$

(a) Établir l'équation différentielle reliant l'avancement volumique de la réaction x au temps t.

(b) En utilisant l'identité :

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(a-x)} - \frac{1}{(b-x)}\right]$$

établir la relation entre a, b, x et t.

(c) Exprimer littéralement le temps de demi-réaction $\tau_{1/2}$ de ce système. Application numérique : [EtBr] $= a = 25$ mmol.L^{-1} ; [OH$^-$] $= b = 100$ mmol.L^{1}. Calculer $\tau_{1/2}$.