**Corrigé du DM n°3**

# 1 Étude d'un satellite

### I. Lancement d'un satellite

1. En l'absence de forces non conservatives l'énergie mécanique $E_m$ sera conservée au cours du mouvement, donc oui le mouvement sera conservatif. On aura :

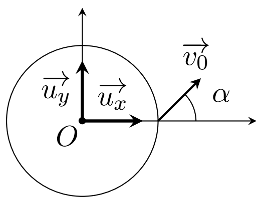
$$\boxed{E_m = E_m(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_T}$$

où :

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

désigne le champ de gravitation à la surface de la Terre.

2. Introduisons un repère d'espace $(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ lié au référentiel terrestre $(R_T)$.




À l'instant initial : $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\,\overrightarrow{v_0}$, d'où :

$$\overrightarrow{L_O} = R_T\,\overrightarrow{u_x} \wedge mv_0\left\{\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{u_y}\right\} = mv_0R_T\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

et donc

$$\boxed{\|\overrightarrow{L_O}\| = mv_0R_T\sin\alpha}$$

Ce moment cinétique est conservé au cours du mouvement puisque :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{0}$$

3. On a donc :

$$\forall\, t,\ \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{L_O} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{L_O}$$

Ainsi les vecteurs position et vitesse restent à tout instant perpendiculaires à un vecteur constant : le mouvement est donc plan, dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{L_O}$ et qui contient le point $O$.

Il s'agit aussi du plan défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$.

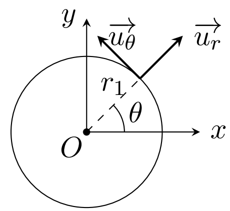
4. Si $v_0 < \sqrt{2gR_T}$, alors :

$$E_m < 0$$

et la trajectoire est forcément une ellipse (ou bien à la limite un cercle).

### II. Étude des trajectoires circulaires

5. La trajectoire circulaire est représentée ci-dessous, ce qui permet d'introduire quelques notations :




La vitesse et l'accélération pour un mouvement circulaire s'écrivent dans la base polaire :

$$\overrightarrow{v} = r_1\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -\,r_1\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + r_1\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

La seule force agissante étant celle de gravitation, nous obtenons en projetant sur la base polaire :

$$\begin{cases} -m\,r_1\dot\theta^2 = -G\dfrac{mM_T}{r_1^2} \\ m\,r_1\ddot\theta = 0 \end{cases}$$

d'où on déduit :

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1^3}}$$

et donc :

$$\boxed{v_1 = r_1\dot\theta = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}}$$

6. La vitesse angulaire $\dot\theta$ du mouvement circulaire étant une constante, elle ne peut être égale qu'à $2\pi/T$ et donc :

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1^3}} \iff \frac{T^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

7. On en déduit aussi :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r_1}}$$

et comme $E_p = -\dfrac{GmM_T}{r_1}$, il vient :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r_1} = -E_c}$$

On remarque bien que l'énergie mécanique est négative, ce qui est cohérent pour une trajectoire circulaire.

## III. Transfert d'orbite

9. On remarque que pour l'orbite de transfert, $2a = r_1 + r_2$, ce qui entraîne :

$$\boxed{E_{m3} = -\frac{GmM_T}{r_1 + r_2}}$$

10. Le changement de vitesse étant très rapide, la position du satellite n'a pas eu le temps de changer lorsque la vitesse devient $v_1'$. La nouvelle énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2}m(v_1')^2 - \frac{GmM_T}{r_1} = E_{m3} = -\frac{GmM_T}{r_1 + r_2}$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{v_1' = \sqrt{GM_T\,\frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}}$$

et donc :

$$\Delta v_A = \sqrt{GM_T\,\frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right]}$$

A.N. : $\Delta v_A = 2{,}39$ km.s$^{-1}$

11. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre les points $A$ et $B$ de l'ellipse de transfert :

$$\frac{1}{2}m(v_1')^2 - \frac{GmM_T}{r_1} = \frac{1}{2}m(v_2')^2 - \frac{GmM_T}{r_2}$$

et donc :

$$\boxed{(v_2')^2 = (v_1')^2 - 2GM_T\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}}$$

**Remarque** :

En remplaçant $v_1'$ par l'expression obtenue à la question 10. on obtient pour $v_2'$ l'expression suivante :

$$\boxed{v_2' = \sqrt{GM_T\,\frac{2r_1}{r_2(r_1+r_2)}}}$$

ce qui est une expression symétrique à celle de $v_1'$ dans laquelle il y a échange des indices 1 et 2.

12. La vitesse $v_2$ est celle du satellite sur une trajectoire circulaire de rayon $r_2$. On connaît son expression qui est :

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta v_B = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right]}$$

A.N. : $\Delta v_B = 1{,}45$ km.s$^{-1}$.

13. On utilise ici la troisième loi de Kepler. La durée $\tau$ du transfert entre $A$ et $B$ est la moitié de la période $T$ de révolution sur l'ellipse de transfert. On a donc :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{3/2} = 2\tau$$

d'où :

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{\sqrt{GM_T}}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{3/2}}$$

A.N. : $\tau = 19\,209$ s ce qui correspond environ à 5h 20 minutes.

## 2 Substitution sur le bromoéthane

On étudie, à 25°C, l'action d'une solution de soude diluée sur le bromoéthane ; la réaction totale a pour équation :

$$CH_3CH_2Br + OH^- \longrightarrow CH_3CH_2OH + Br^-$$

1. (a) Pour une réaction d'ordre 1 par rapport à chacun des réactifs, on peut écrire :

$$v = k\,[CH_3CH_2Br]\,[OH^-]$$

où $k$ est la constante de vitesse.

Comme les coefficients stœchimétriques des deux réactifs sont égaux et que leurs concentrations initiales sont égales, nous avons à tout instant $t > 0$ :

$$[CH_3CH_2Br] = [OH^-]$$

et donc :

$$v = -\frac{\mathrm{d}[OH^-]}{\mathrm{d}t} = k\,[OH^-]^2$$

ce qui est une équation différentielle à variables séparables. Le temps de demi-réaction est celui pour lequel $[OH^-](\tau_{1/2}) = C_0/2$, ce qui conduit à :

$$\int_{C_0}^{C_0/2} \frac{\mathrm{d}[OH^-]}{[OH^-]^2} = -k\int_0^{\tau_{1/2}} \mathrm{d}t = -\,k\tau_{1/2}$$

et donc :

$$\boxed{k\tau_{1/2} = \frac{1}{C_0}}$$

Pour montrer que cette loi est vérifiée, il faut montrer que $1/C_0$ est une fonction linéaire de $\tau_{1/2}$. Une régression linéaire sur les couples $(\tau_{1/2}, 1/C_0)$ donne un coefficient de corrélation $r = 0{,}999984 > 0{,}99$, ce qui confirme la loi.

(b) $k$ est la pente de la droite obtenue par la régression linéaire précédente. On trouve alors :

$$\boxed{k = 9{,}1.10^{-2}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1} = 1{,}5.10^{-3}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

2. D'après la loi d'Ahrrénius :

$$k(T) = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

En posant $T_1 = 298$ K et $T_2 = 313$ K (températures en K), nous obtenons :

$$\frac{k(T_2)}{k(T_1)} = \frac{\exp(-E_a/RT_2)}{\exp(-E_a/RT_1)} = \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right)$$

et donc :

$$k(T_2) = k(T_1)\,\exp\left(\frac{E_a}{R}\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}\right) \overset{\text{AN}}{=} 5{,}1.10^{-1}\,\text{L.mol}^{-1}.\text{min}^{-1}$$

d'où on tire que :

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{k(T_2)C_0} \overset{\text{AN}}{=} 39\text{ min}$$

L'élévation de température a donc fortement augmenté la vitesse de réaction.

3. On a maintenant :

$$[\text{EtBr}] = a\,;\,[\text{OH}^-] = b$$

(a) À l'instant $t > 0$ les concentrations des deux réactifs déviennet :

$$[\text{EtBr}] = a - x \quad \text{et} \quad [\text{OH}^-] = b - x$$

et

$$v = -\frac{\text{d}[\text{OH}^-]}{\text{d}t} = k\,[\text{EtBr}]\,[\text{OH}^-] \iff \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = k\,(a-x)(b-x)$$

ce qui est encore une équation différentielle à variables séparables.

(b) On obtient donc :

$$\int_0^x \frac{\text{d}x'}{(a-x')(b-x')} = k \in_0^t \text{d}t' = k\,t$$

d'où :

$$\frac{1}{b-a}\left[\int_0^x \frac{\text{d}x'}{a-x'} - \int_0^x \frac{\text{d}x'}{b-x'}\right] = k\,t$$

et donc :

$$\frac{1}{b-a}\left[-\ln(a-x) + \ln(a) + \ln(b-x) - \ln(b)\right] = k\,t$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{(b-x)\,a}{(a-x)\,b}\right) = k\,t}$$

(c) Le temps de demi-réaction correspond à la disparition du réactif le moins concentré, c'est à dire EtBr puisque $a < b$ :

$$[\text{EtBr}](\tau_{1/2}) = a/2 \iff x(\tau_{1/2}) = a/2$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{k\tau_{1/2} = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{2b-a}{b}\right)}$$

A.N. à 25°C : $\tau_{1/2} = 82$ min